欧姆社学习漫画

漫画材料力学

〔日〕末益 博志　長嶋 利夫／著
〔日〕円茂 竹縄／漫画绘制
〔日〕オフィスsawa／漫画制作
滕永红／译



科学出版社

欧姆社学习漫画

漫画材料力学

〔日〕末益博志 长嶋利夫 著
〔日〕円茂竹縄 漫画绘制
〔日〕オフィス sawa 漫画制作
滕永红 译



科学出版社
北 京

图字：01-2012-4186号

内 容 简 介

你是不是正在学习材料力学知识呢？你是不是对材料力学的知识很感兴趣呢？你是不是正为如何能更好地学习材料力学而头痛不已？那么，对你来说，这本书再适合不过了。这是世界上最简单易学的材料力学教科书与普及读物，它通过漫画式的情境说明，让你边看故事边学知识，每读完一篇就能理解一个概念，只要你跟着主人公的思路走，那么你肯定能在较短的时间内掌握材料力学的相关知识。

有趣的故事情节、时尚的漫画人物造型、细致的内容讲解定能给你留下深刻的印象，让你过目不忘。不论你是学生、上班族还是已经自己创业的“老板”，活学活用材料力学知识，定会给你的学习、工作与生活增添更多的便利。

图书在版编目（CIP）数据

漫画材料力学/（日）末益博志，（日）长嶋利夫 著；（日）円茂竹縄漫画绘制；（日）オフィスsawa漫画制作；滕永红 译.
—北京：科学出版社，2012
（欧姆社学习漫画）
ISBN 978-7-03-034638-4

Ⅰ.漫…　Ⅱ.①末…②长…③円…④オ…⑤滕…　Ⅲ.材料力学-普及读物
Ⅳ.TB301-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第117411号

责任编辑：张丽娜　赵丽艳／责任制作：董立颖　魏　谨
责任印制：赵德静／封面制作：泊　远

北京东方科龙图文有限公司　制作
http://www.okbook.com.cn

科学出版社　出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京天时彩色印刷有限公司　印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012年7月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2012年7月第一次印刷　印张：14 1/2
印数：1—5 000　字数：228 000

定价：32.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

我们在初中和高中所接触的理科知识大致可以分为两个领域，一个是“记忆”、“了解”领域，一个是“思考”领域，我想大家一直都在学习与这两个方面有关的内容。但是，我们往往容易忘记学习理科是为将来工作打好重要基础，而不是只在意考试是否通过。暂且不论考试结果是否能够反映个人实力，但只要通过应试教育认真地学习，将来一定有用。大学就是一个在原有实力的基础上进一步地学习并为培养出“会工作的人”做准备的地方。进入什么样的大学并不是如此重要，重要的是大家将来如何充分地利用能发挥所学知识的机会。既然是做学问，希望大家能够怀着感激的心情潜心地钻研、活用所学过的知识。

另外，在进入大学机械系后，都会学习物理学中的力学科目（如工程力学、机械力学、材料力学、流体力学、结构力学、热力学）。各个学科领域都是以牛顿力学为基础、运用应用数学的手法来展开的。在生产现场，一般都会灵活地应用这些专门力学来设计制造工序、设计并制造产品（当然在实际的生产现场还存在着这些学科所不能覆盖的内容，这些内容都作为现场作业技能被保留下来。或许将来也能够用计算机从理论上证明这些作业技能）。其中很多学生反映材料力学这一科目很难、不容易理解，好像把实际材料与力学理论联系起来这一点会成为他们学习的障碍。不过本书会以漫画的形式将材料力学的内容简明易懂地叙述出来，我们在感叹漫画惊人说服力的同时，也能够切身地体会出漫画究竟具有多强的传达力。如果读者们能够在欣赏漫画情节的过程中学习到一些枯燥而令人烦闷的材料力学知识、得到理解材料力学的灵感，作为作者我将会感到无比的欣慰。

最后我向与我一起共同完成此书的长嶋利夫老师、各位编辑以及站在读者立场上给我提出宝贵意见的欧姆社开发局的成员们，还有负责漫画制作的オフィス sawa 的泽田佐和子、円茂竹縄等相关人员表示衷心的感谢。

末益博志

2012 年 1 月

Original Japanese language edition
Manga de Wakaru Zairyourikigaku
By Hiroshi Suemasu, Toshio Nagashima
Illustration by Enmo-takenawa
Produced by Office sawa

This Chinese version published by Science Press, Beijing
Under license from Ohmsha, Ltd.

マンガでわかる材料力学
末益 博志　長嶋 利夫　オーム社　2012

著者简介

末益博志

东京大学研究生院工学系研究科博士后。现为上智大学理工学部教授，工学博士。主要著作有《工业力学》（编辑、合著）、《机械力学》（编辑、合著），实教出版社；《复合材料力学入门》（编辑、合著）、《最新材料力学》（合著）、《先进复合材料工学》（合著），培风馆。

长嶋利夫

东京大学研究生院工学系研究科博士后。现为上智大学理工学部教授，工学博士。主要著作有*Meshfree Method*（《无网格解法》）（合著），丸善；《HPC程序设计》（合著），欧姆社。

オフィス sawa

2006年成立。以制作医疗、计算机、教育系列的实用书籍和广告为主。擅长利用大量漫画和插图来制作手册、参考书、促销宣传品等。

Email：office-sawa@sn.main.jp

泽田佐和子

脚本创作。

円茂竹縄

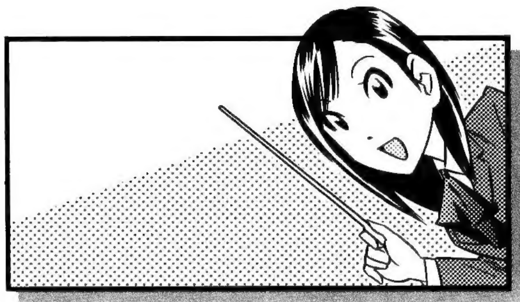
漫画制作。

オフィス sawa

DTP。

目　录





第3章 应变和变形 91

第4章 材料的强度与力学性能 117

第5章 应力的计算方法 139

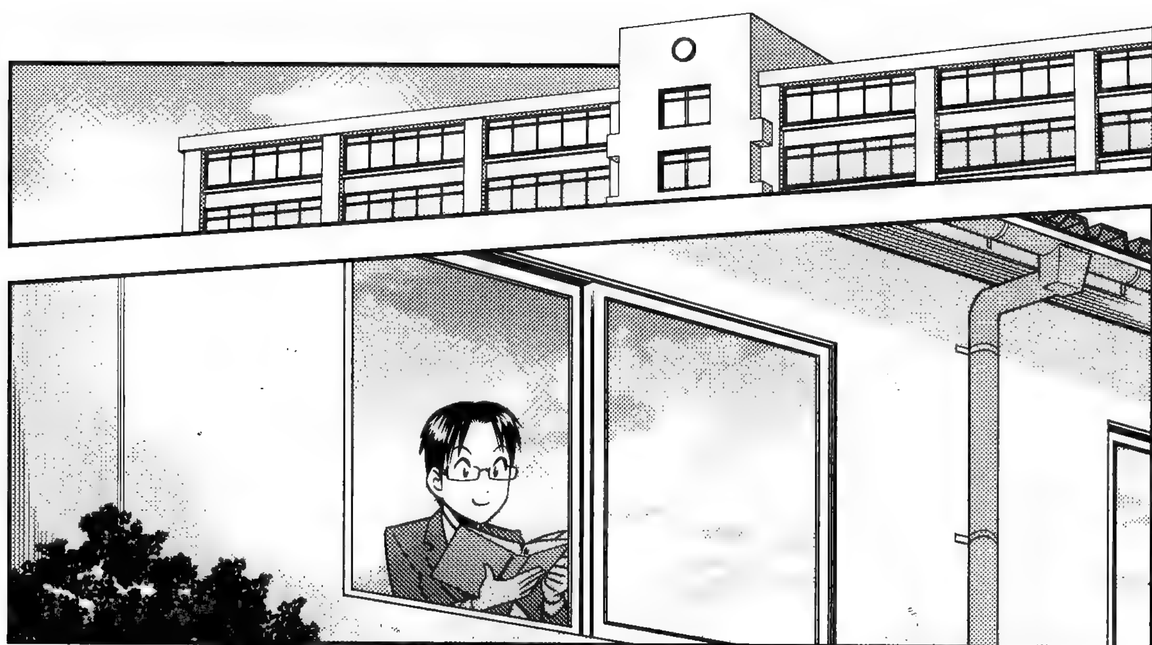
第6章 材料力学的应用 171

附　录 215



序　章

活动室是共用房间！？



下课后……
安静读书的时间

咚 咚 咚 咚

这是文学青年放松身心的休闲时光……

咚 咚

做好了！
噢耶！

……哎呀，
吵死了!!!

你来瞧瞧！
西本！

什么呀？
这个东西看起来怪怪的……

是书架！

你说什么？
这可是想成为世界著名设计师的NONO设计的书架哟！


我试着将它设计成了V字形，可以给人留下与众不同的印象！
啊哈，是吗？


嗨哟
那么，让我马上放几本书看看吧！
啊，如果那样做的话……

咔嚓
完了


啪嚓
啪啪


为什么会这样呢？
已经到了它的承受极限了！

GO

果然和你共用一个活动室就是一个错误!!

把我安静读书的时间还给我!

喂,接下来我会成功的!

哎哟,好像相处得很愉快呀!

但是,你们能不能安静点呢?

啊,尾濑会长!

会长,请给我想想办法吧!

文艺部和设计部共用一个活动室简直就是一场灾难!!

文艺部

& 设计部

因为活动室数量有限,我也没有办法。

只有一个成员的课外活动小组一般都没有活动室的吧?

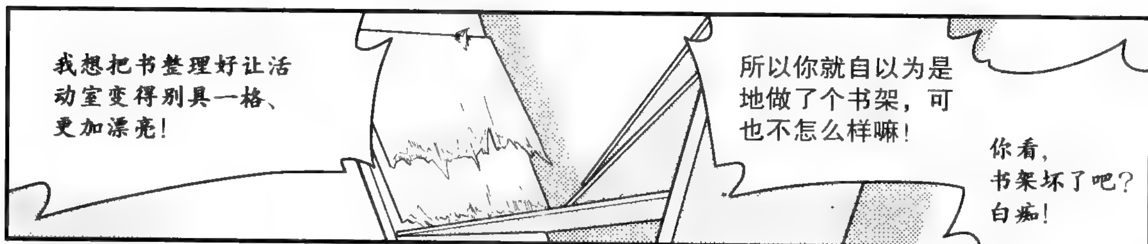
嘎啦

再说这是由抽签决定的,这也算是一种缘分,是不是?

嗯……但是,我和这个家伙的价值观完全不同。


我只是想把活动室里装满书！


西本只是把书乱堆一气！
这对于想成为室内设计师的我来说是绝对不允许的！

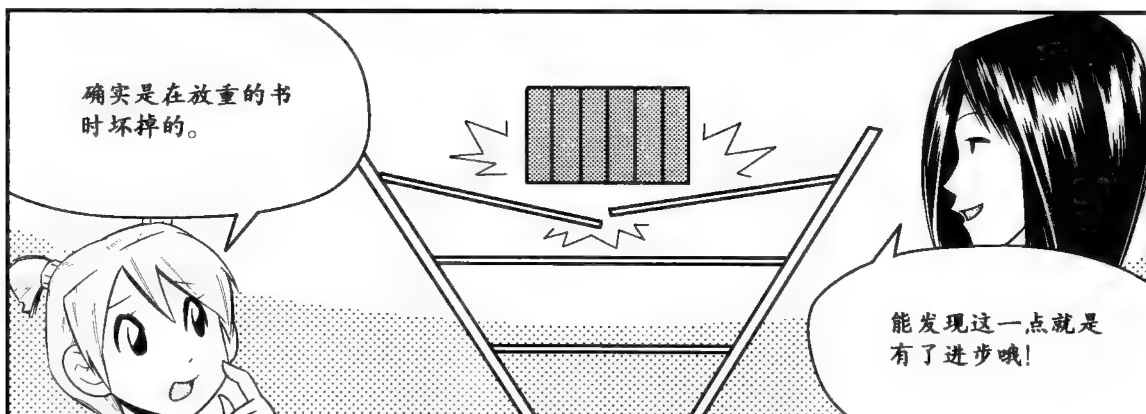

我想把书整理好让活动室变得别具一格、更加漂亮！
所以你就自以为是地做了个书架，可也不怎么样嘛！
你看，书架坏了吧？白痴！


嗯……我明白了！
总而言之，如果做出一个完美的书架，你们就会和好，是吧！
或许会吧。
哎呀，那个书架怎么办……


那么，让我们一起来想办法吧！
这个书架为什么会坏呢？





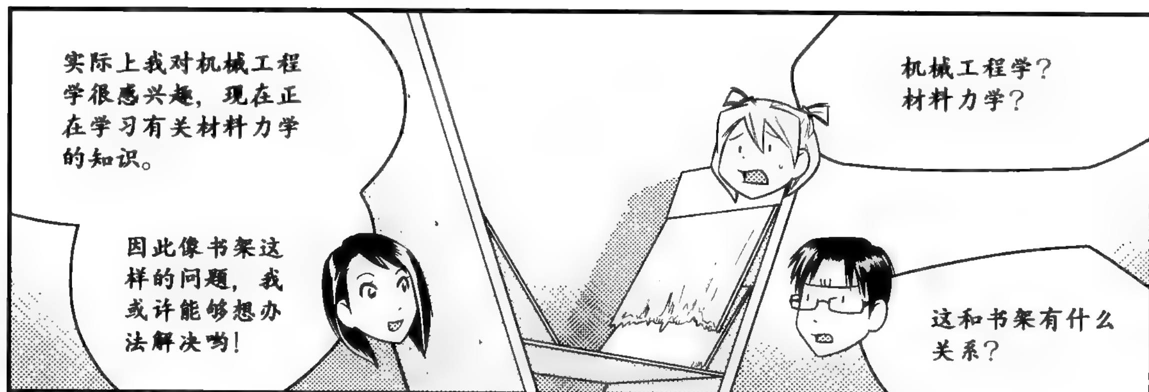


要制作出安全的结构体，知道“作用于结构体的力”和“结构体会损坏的原因”比什么都重要。

哦？

哦，
好像讲得很详细。

这些都不算什么啦……



机械工程学是以4种力学为基础，学习机械设计和技术的学问。

机械工程学

热力学

机械力学

流体力学

材料力学

其中材料力学是“为了制作出安全结构体所需的基础学问”。



从手机、眼镜、
文具……

到学校、车站、高楼
大厦等建筑物，

甚至于汽车、公交车、
飞机、新干线、自行车、
摩托车……
**这些都是材料力学的研究
对象哟。**

材料力学与世界上
所有的机械和构件
都有关！

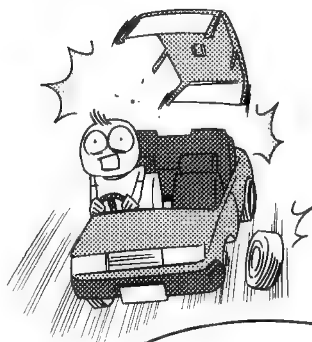
它就像一名在背地
里卖力却无人知晓
的无名英雄。



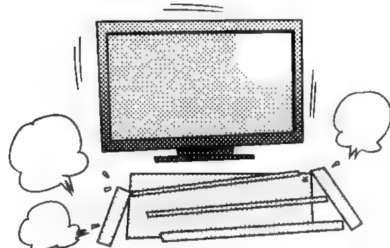
在3级地震时就会坏的大厦，

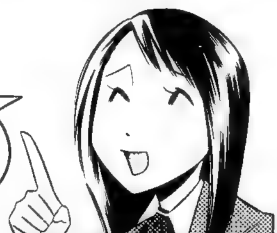


时速达到30公里就会坏的汽车，



一放电视就会坏的电视柜，







放心！今后如果学了材料力学就能够制作出结实的书架。

并且，如果懂材料力学，在制作设计图时就会明白东西是否易损坏！



另外，因为制作材料和制作方式不同，物件（结构体）的性能也会发生变化，所以材料力学也要研究与这些相关的内容。

成本？

生产能力？

功能？

强度？

光是听到这些，就感觉到好像很难……

嗯哼，想成为设计师的NONO也会说这样的话吗？

材料力学就是一门“把画在纸上的东西变为现实物体的学问”哦！

若这个东西在纸上的设计非常酷，但是做出来后马上会坏掉，就根本无法实现这个设计。

要从安全性的角度来审视出色的设计，并使之变为现实的东西……

你那样考虑的话，就会觉得它就是一门充满梦想的学问吧？

我有梦想！

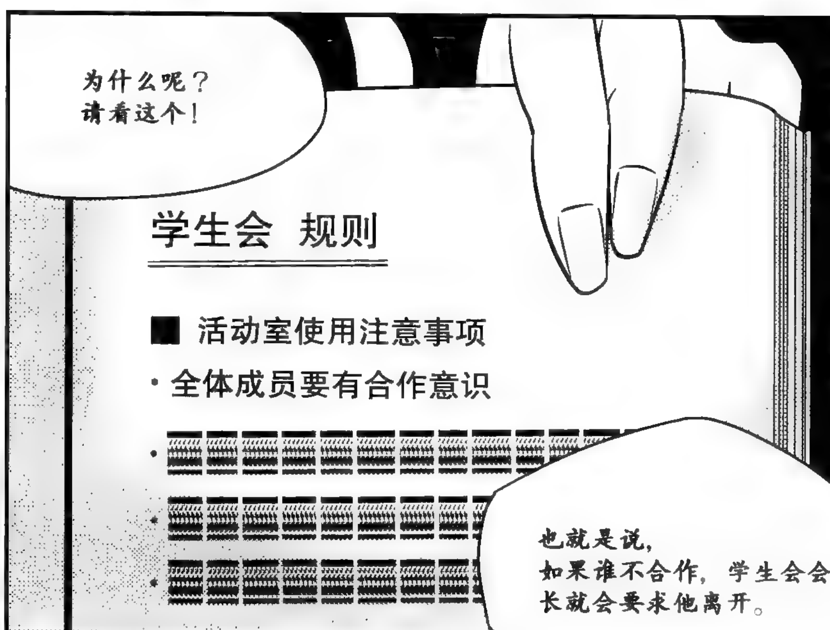
虽然它看起来很难，但我还是想去了解它！


下次一定要做一个不会坏的书架！
并且通过NONO式的设计，


喂，西本，你怎么啦？
GO
那个，我有点介意，力学不是理科的东西吗？


我学的完全是文科！只要能够读读书我就觉得很满足了。
像材料力学那样的学问好像很难，而且自己动手做一些小家具是属于体力劳动，我根本就不想参与。


哼……
那么就请你离开活动室。
啊？


为什么呢？请看这个！
学生会 规则
活动室使用注意事项
·全体成员要有合作意识
也就是说，如果谁不合作，学生会会长就会要求他离开。



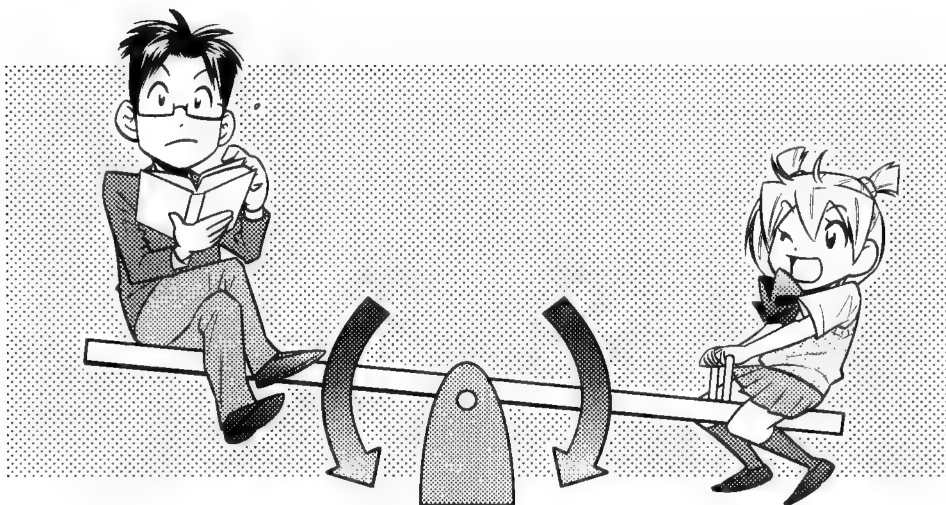


材料力学！加油吧！

遇到大麻烦了!!!

第1章

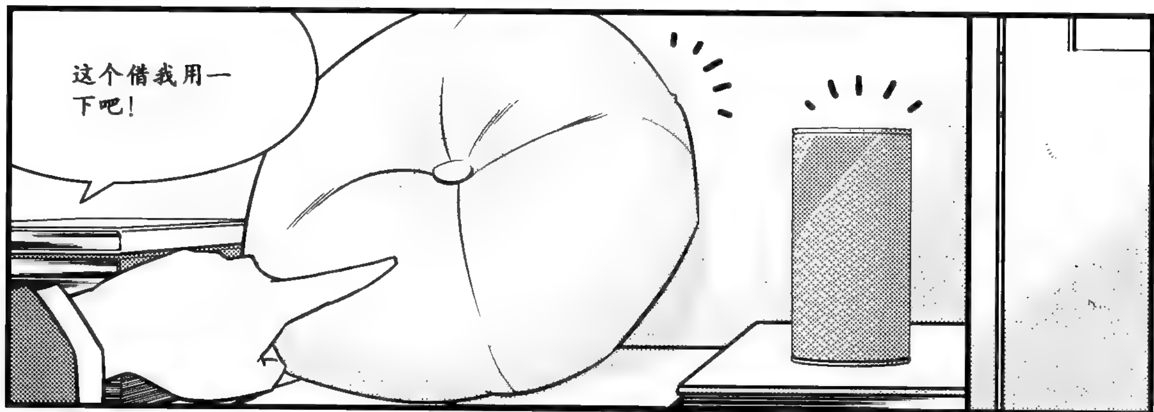
变形物体的力学



1　思考施加在物体上的力

灵活运用向量（载荷）



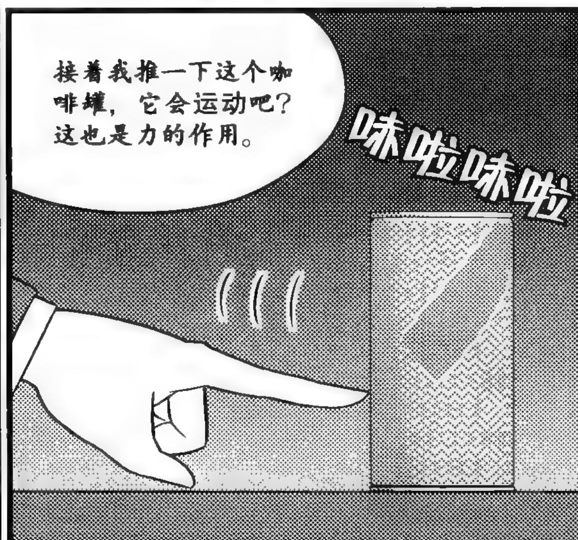







力，
总觉得好像有点难……
很简单哟，虽然我们用眼睛看不到力，却能够切身体会到。


我按一下靠垫，它就会变形吧？这就是力的作用。
瘪了

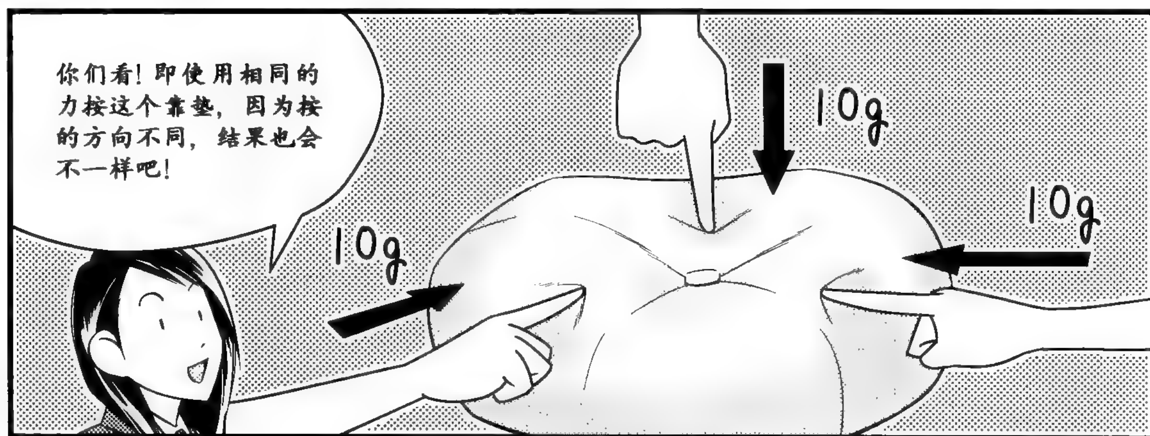

接着我推一下这个咖啡罐，它会运动吧？这也是力的作用。
咻啦咻啦


啊，总而言之就是说因为力的作用，物体有的会变形、有的会运动。
没错，
正是如此！
另外……


我们把像这样从外部施加在物体和其部件上的力叫做“外力”或“载荷”。









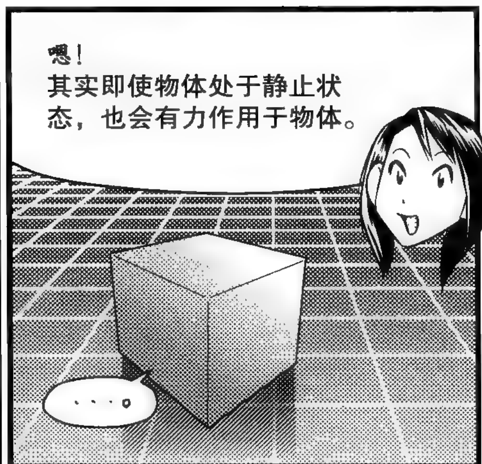
※ 在上图中，箭头的终点为着力点，但是有时着力点是起点

从反方向作用的力(反作用力)





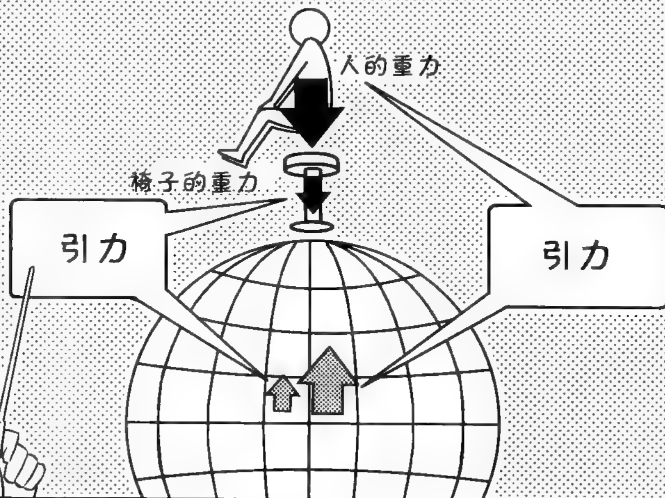






地球上所有的物体都在和地球相互吸引。

重力是因为物体受到地球的引力所产生的。我们将重力的大小叫做重量。



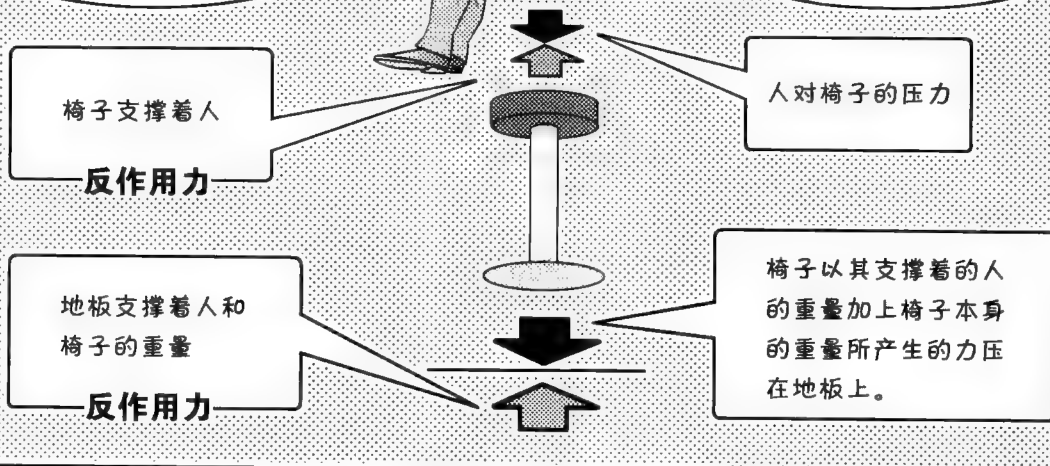
噢，那我的体重也是因为重力的缘故吧！

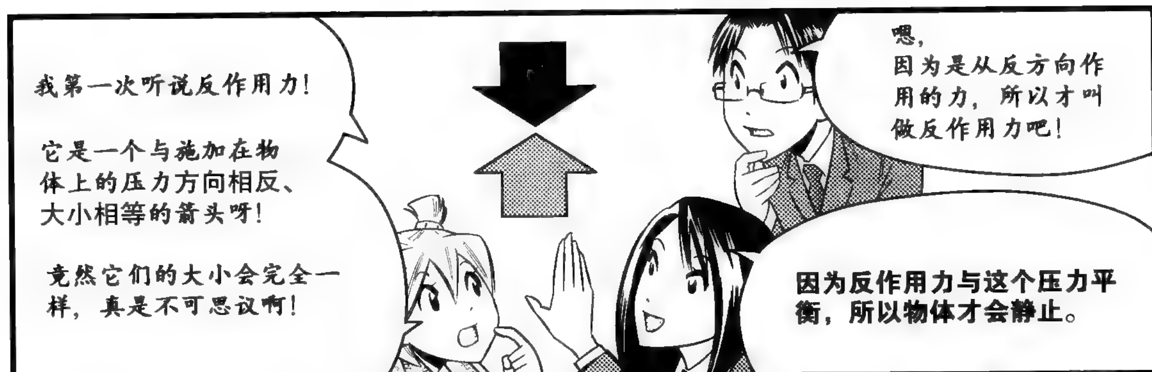
呵呵，没错！并且还有从反方向支撑那个重量的力。

请看这个！

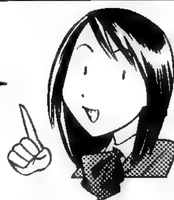
在椅子和地板上都存在着“物体重量所产生的压力”和“从反方向以相同大小支撑着该物体的力——反作用力”。

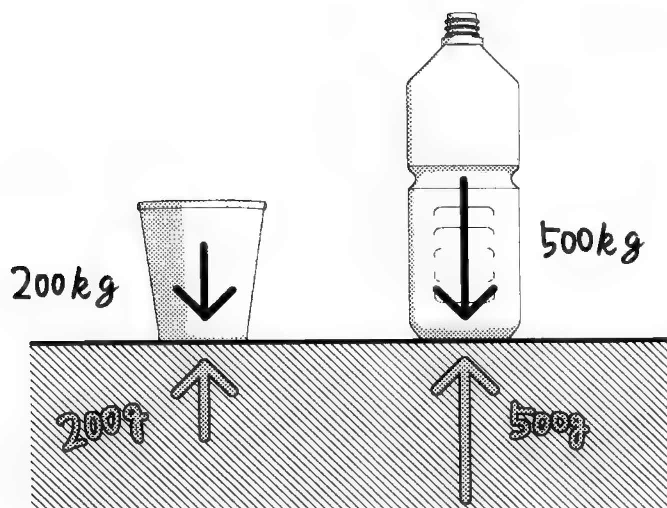
“施加的压力”原本都是重力，因为它们是从外部施加在椅子、地板等物体上的力，所以也可以将它们称作外力、载荷。

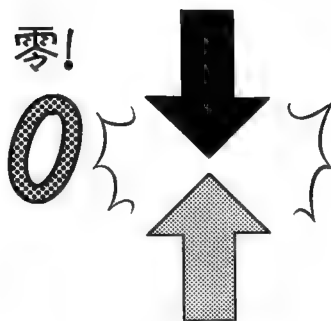




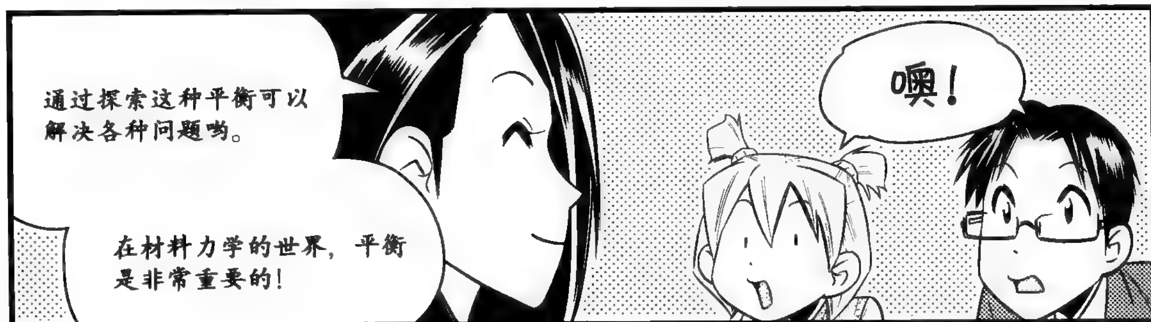
当物体静止时，作用在物体上的力处于平衡状态。并且作用于静止物体上的力合计为零。







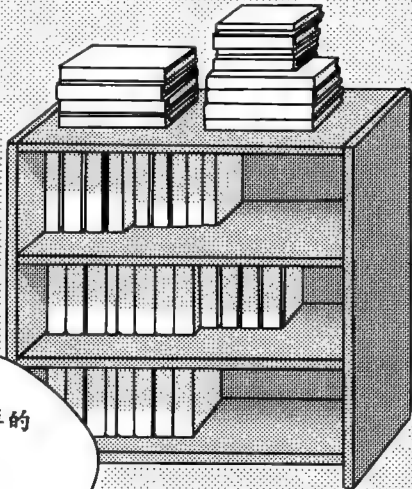
物体静止 ＝ 力平衡



牢牢地支撑着（支点）

下面我们以书架为例来思考一下吧！

嘿嘿！
我一直期待着！

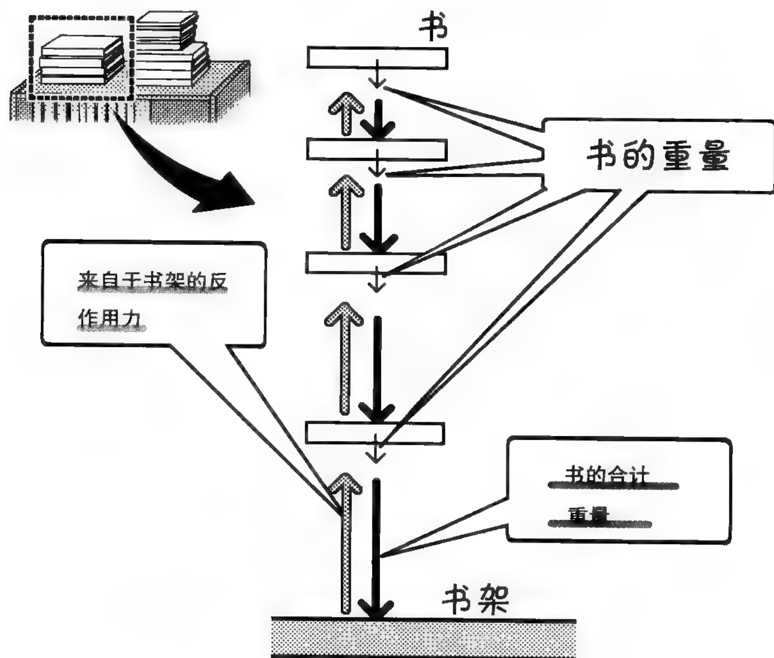


什么嘛，这不就是一个普通的书架吗？

我就想要一个这样的书架哦……

首先请注意一下最上面那层。

★ **压力和反作用力**也作用于一本又一本重叠着的书上



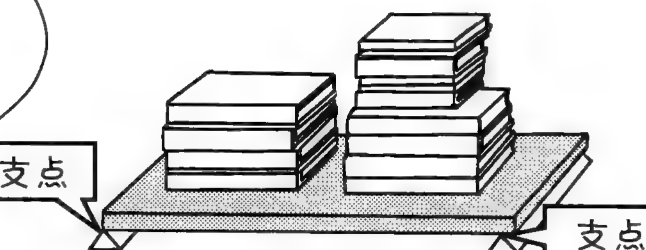
哦，我知道，由于书的重量的增加，书对书架的压力会不断地增加。

书的重量……
所有的力流一定会传递吧。

那样的话，书越多，就会越重。

嗯，
并且放在这个书架上的书的重量是由书架板的两端所支撑着。

我们将这样的支撑点叫做支点。



堆放在左边的书的重量

堆放在右边的书的重量

反作用力 1

反作用力 2

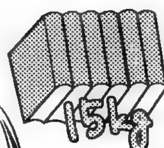
※ 左右反作用力的大小未必相同　反作用力 1 和反作用力 2 是有区别的

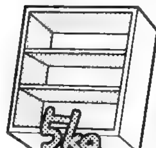
支撑着它们的反作用力就作用于这个支点上啊！

书架会把所有书的重量传递给左右支点，两侧的书架板又会把它们的重量传递给地板。

力不会在某处消失，而是会一直被传递下去。

例如，假设所有书的质量为 15kg，书架的质量为 5kg……





合计为 20kg！这既是所有书和书架的质量，也是地板必须承受的。

没错，
从力学角度来说的话……

如果换算为就是 20kgf（千克力），即 20×9.8=196N（牛顿），也就是地板支撑着 196N 的力。

关于单位的详细内容将会在 P23 说明

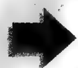
结果就是这样。



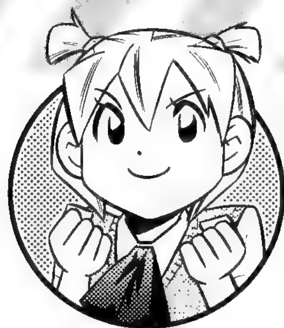
那样看来，高层大厦和公寓建筑还真是了不起的杰作啊！

是啊，其中的杂物、所有人员以及大厦本身的重量都会传递到地面。





1N与1kgf的大小



在学习力学时，单位是非常重要的东西！尤其是 **1kgf=9.8N** 很重要。大家要和 NONO 一起加油，慢慢地习惯这些！

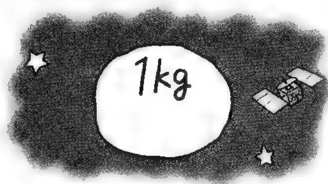
在力学上将 1kg 物体所受到的重力记为 1kgf（千克力）。kgf 是 kilogram-force 的缩写。例如，在刚才的书架例子中，为了区分质量和重量，我们在书写时用 kgf 代替了 kg。

另外，1N 是指使质量为 1kg 的物体产生 $1m/s^2$ **加速度**※ 的力。牛顿（N）是**国际单位制（SI 单位制）**中力的单位。国际单位制是世界上最普遍采用的标准度量衡单位系统，不过从感觉上来看，用重力单位表示比用 SI 单位表示更容易理解。

$1N \approx 0.102kgf = 102gf$，也就是 1N 相当于质量约 100g 物体的重力。

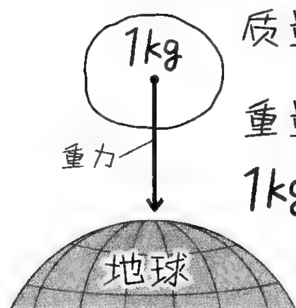
总结一下，1kg 物体所受到的重力为 1kgf，大约为 9.8N。要牢牢地记住 1kgf = 9.8N！

在宇宙空间……



质量：1kg
重量：没有

在地球上……



质量：kg
重量（重力的大小）：
1kgf = 9.8N

※ 加速度是指单位时间内速度的变化率。
如果速度变大，运动的物体就会变快，静止的物体就会运动。

好像在滴溜溜地旋转（力矩）

那么，接着让我们以挂西服的大衣架为例来思考一下吧。

NONO，你能不能自由地发挥一下想象力，给我们画一张西服衣架图？

好，就交给我NONO吧！

这个怎么样？

确实是自由发挥啊！

不，与其说这是西服衣架图，还不如说这是晾衣服图……

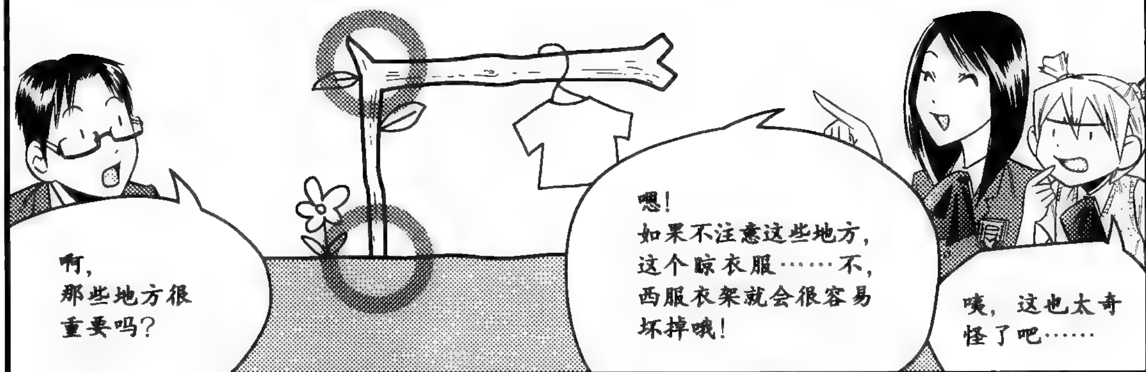
大家对不起了！即便这样，也是我NONO想出来的！

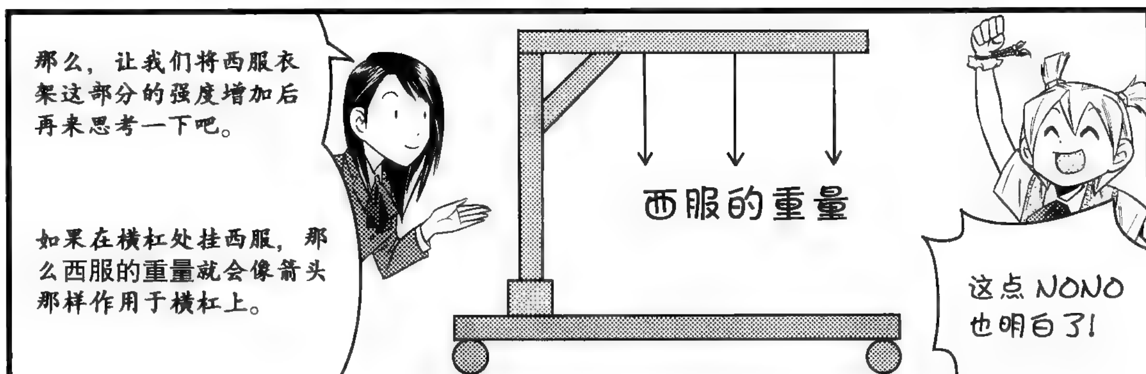
因为西服很重，所以我就把横杠部分加粗了！

加粗！

西服的重量

原来如此啊！但是还有一些地方也要注意哦！就是这里和这里！





重要的就是从这里开始。
其实，这个重力会让横杠呈顺时针方向旋转。

旋转

西服的重量

哇!?

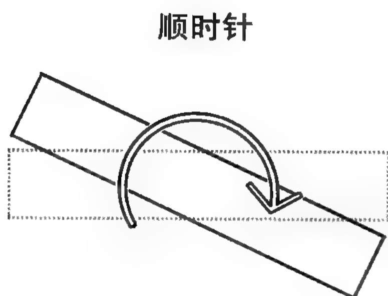
什么！

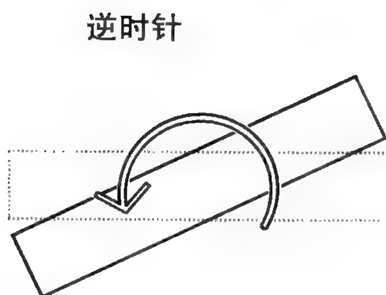
物理学将这个使物体旋转的作用称为“力的转矩”或简称为“力矩”。


讲得那么快。
好难啊！对于那个力矩我一点儿都不了解。

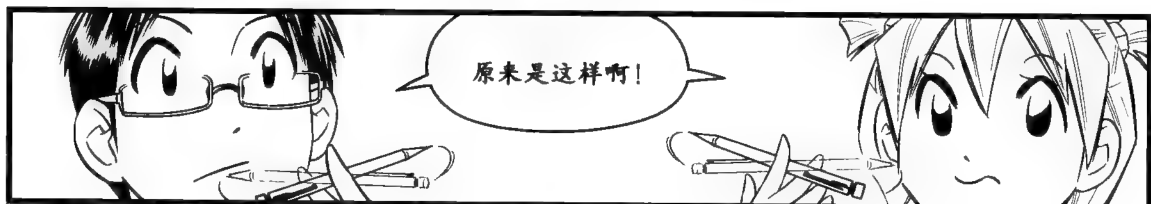

施加力
轻拿
啊，在我们周围到处都有力矩哦，
例如，轻轻地拿着铅笔的中间，然后对笔尖施加力，你会感觉到铅笔好像要旋转吧？


没错，确实有这样的感觉。
是吧？力也有让物体旋转的作用！
不仅是顺时针旋转，逆时针旋转当然也是力矩！


顺时针


逆时针

它们都是力矩


原来是这样啊！

那么再回到西服衣架上来吧。

竖杠会将西服的合计重量和由此产生的力矩传递给下面的基座。

竖杠

西服重力所产生的合力矩

西服重力之和（合计）

当然下面的台子对于重力会有反作用力。而对于这个力矩也会有反作用力矩在发挥作用。

西服重力之和
$F=P_1+P_2+P_3$

由西服重力产生的力矩※
$M=P_1l_1+P_2l_2+P_3l_3$

l_3
l_2
l_1
P_1 P_2 P_3

反作用力矩
$M=P_1l_1+P_2l_2+P_3l_3$

反作用力(来自于基座的力)
$F=P_1+P_2+P_3$

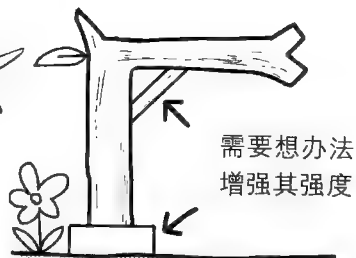
哦，原来如此！就像重力和反作用力会相互抵消一样，力矩与反作用力矩也会相互抵消，

所以这个西服衣架不会旋转而是静止不动的，对吧。

没错！
因此……

※ 关于力矩公式的详细内容将在 P29 说明。

因为力矩和力的作用，我们必须要注意这里和这里，以防横杠和弯头连接部位损坏。



当然也要将竖杠和下面的基座加粗到能够承受得住这些力哦！

确实，
如果杠件太细或其连接部位太脆弱，看起来像会坏掉一样。



呜呜……
好可怜啊，它坏掉的样子浮现在我眼前。

这样就要预测结构体会受到的力或力矩。
这是在设计中的第一步，计算强度！

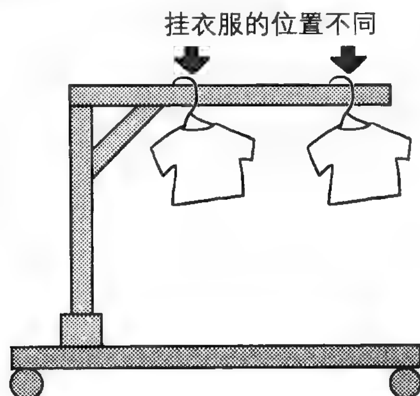




回忆跷跷板（力矩的基础知识）



在这里我将会介绍一下有关力矩的基础知识。
例如，在刚才所讲的西服衣架中，根据挂衣服的位置的不同，所产生的力矩的大小会发生变化。

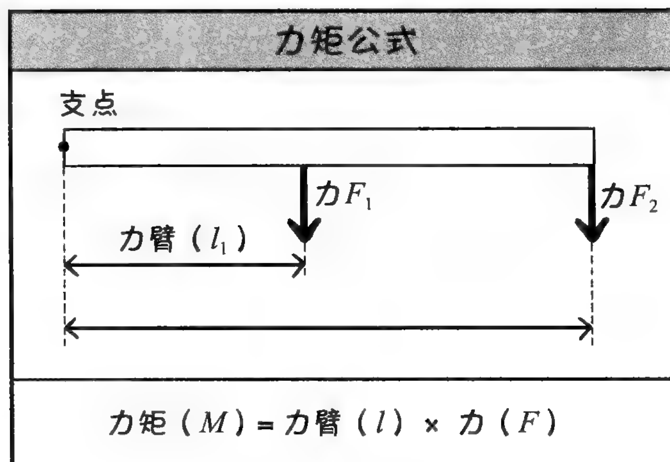




咦，即使是同样重的衣服，力矩也会变化吗！？



嗯。如果知道力矩的公式，就会明白其中的意思！
我们将**支点到力的作用线的垂直距离**叫做“**力臂**”，要好好地记住哦！



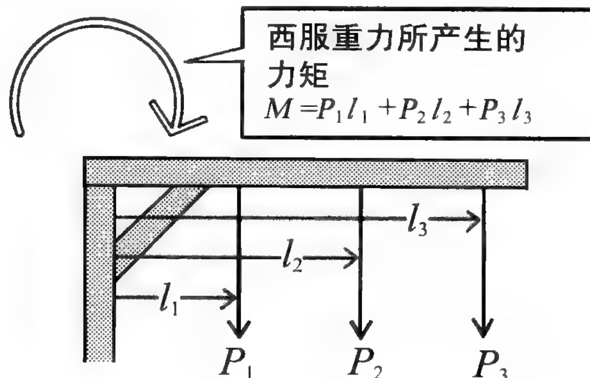


哦！力相同时，距离支点越远，力矩就越大。



嗯。**力臂**也很重要啊。

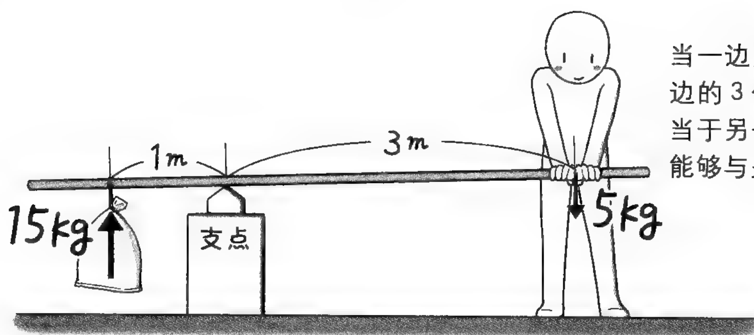
我终于明白刚才那个西服衣架的力矩公式的意思了。





力矩有很多种哦。

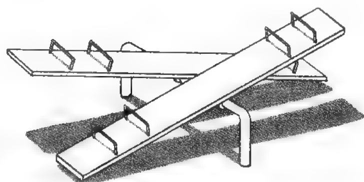
杠杆原理也活用了力臂的不同。



当一边力臂的长度是另一边的 3 倍时，只需要用相当于另一边力的 1/3 力就能够与另一边保持平衡！



啊，这不是跷跷板吗？





没错！跷跷板也能改变坐的部位吧？

如果坐的部位离支点越远，力矩就越大。通过选择坐的部位，即使是体重有差别的孩子们也能够一起轻松、快乐地玩跷跷板。

2　思考物体的力平衡

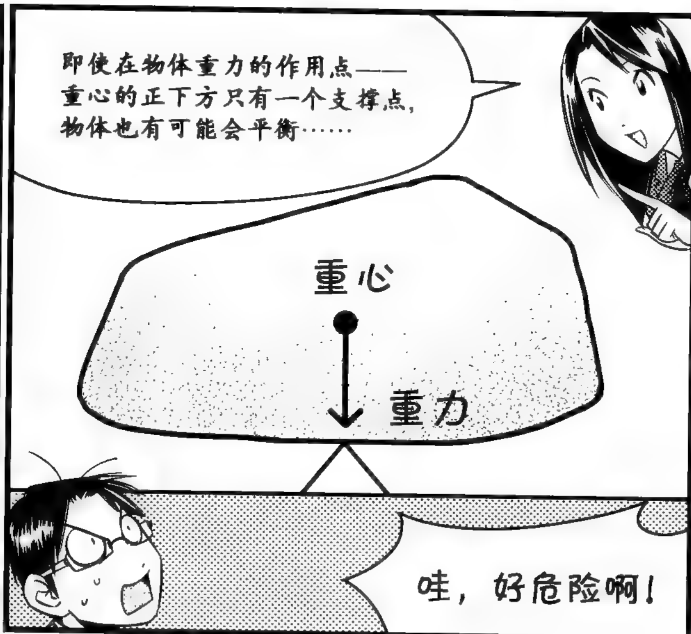
试着自己画一下吧（自由体图）











没错！如果平衡稍微被打破，物体就会倒……

在材料力学上是不会处理如此不稳定的物体的。

在材料力学上处理的都是一些结实而稳定的物体。

接着来思考一下这块石头所受的力。首先让我们来描绘一下这块石头的自由体图。

自由体图……

就是用向量来表示施加在某一物体上的力的作用。

如果有了自由体图，就很容易理解力平衡的状况了。

支点

支点

请不要将它想象得那么难啦！我们已经知道了自由体图哦。你们看，这就是书架的自由体图。

啊，什么，就是这个东西？

若是这样，好像我会。只要把作用于支点的支撑力作为向量画出来就可以了吧！

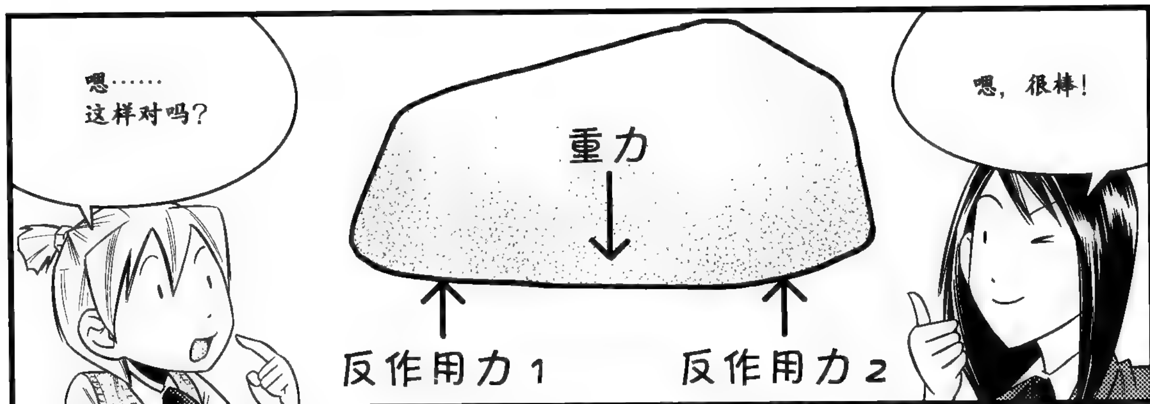
堆放在左边的书的重量

堆放在右边的书的重量

反作用力 1

反作用力 2

这就是自由体图！



只是要注意这一点：左右两边的反作用力的大小未必相同。

现在虽然画成了相同长度的向量，但是给它们分别命名为“反作用力 1”、“反作用力 2”，表示它们是不同大小的向量。

反作用力 1

反作用力 2

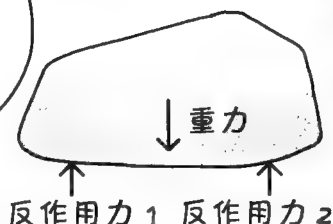
反作用力 1 ≠ 反作用力 2





这些都是平衡的！
（力和力矩的平衡方程式）

那么，让我们试着以自由体图为基础列出公式求一下反作用力1与反作用力2!

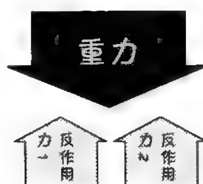


首先让我们列出（力平衡方程式）！你们还记得吗？

我来！

当物体静止时，物体施加的压力——重力和物体受到的来自于反方向的支撑力——反作用力是平衡的。

因此……



（力平衡方程式）就是……
重力 = 反作用力1+ 反作用力2

是吧！

没错！接着让我们来思考一下物体不会旋转的条件。

列出力矩平衡方程式。



刚才虽然学过了力矩，但是到底要怎么列出力矩平衡方程式呢……



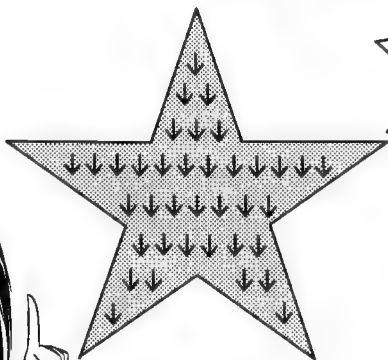
注意！
这里重要的就是重心！

你说过重心就是重力的作用点吧？它有那么重要吗？

嗯！
那么在此要好好地理解有关重心形成的知识。

重力会作用于物体之中所包含的各个原子、分子。也就是说，重力会平均地分布在物体的各个部分。

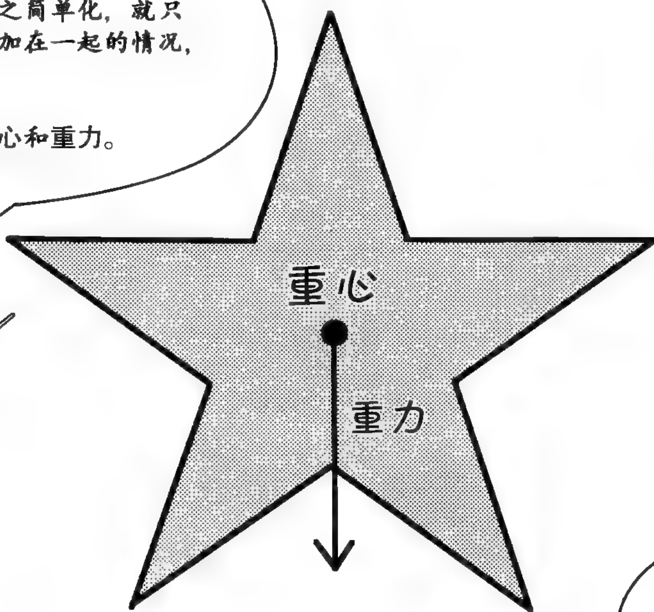
例如，星形物体的重力分布就是这样……



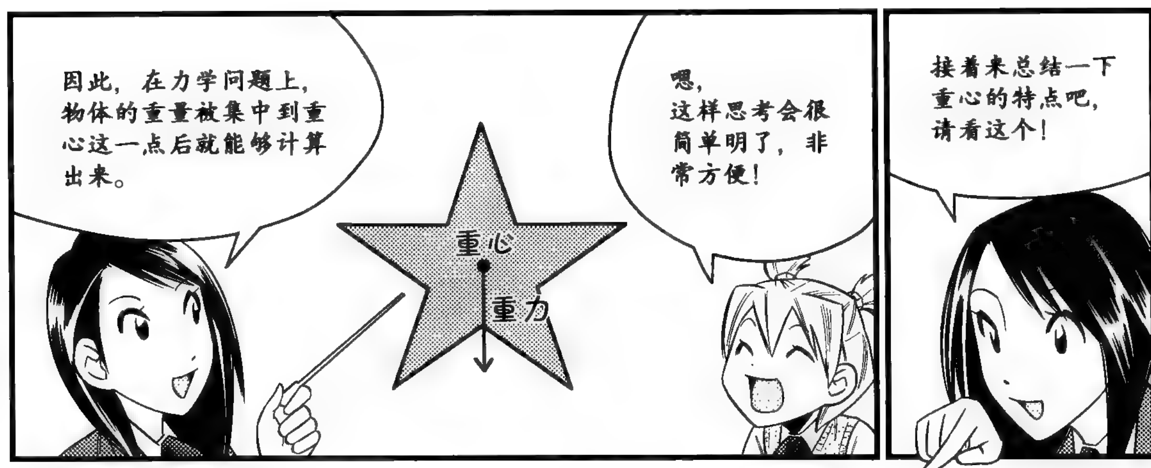
啊！
到处都是重力的向量，好复杂啊！

是啊。因此为了使之简单化，就只考虑把所有向量都加在一起的情况，即合力。

这样，就会知道重心和重力。



噢，
原来是这样！

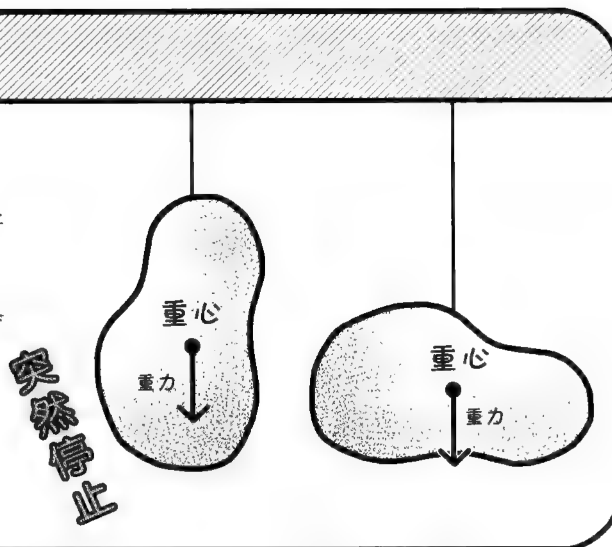


重心的特点

- 重心是重力的作用点
- 当在一点将物体悬挂或支撑时，物体正好处于平衡。

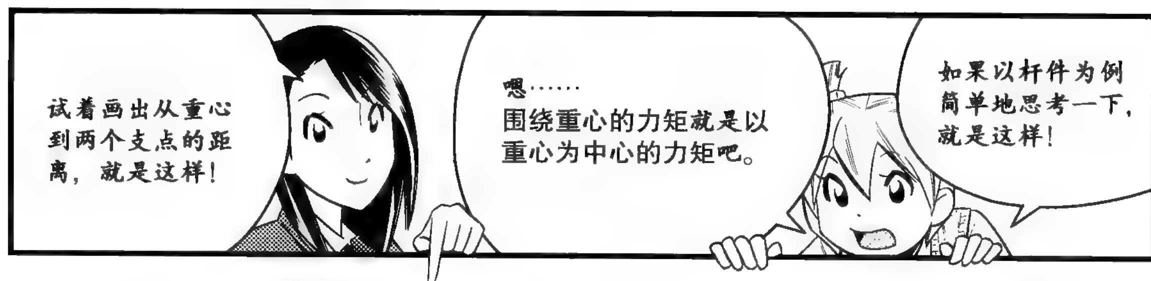
作用于物体上的力会保持平衡，物体也不会旋转！

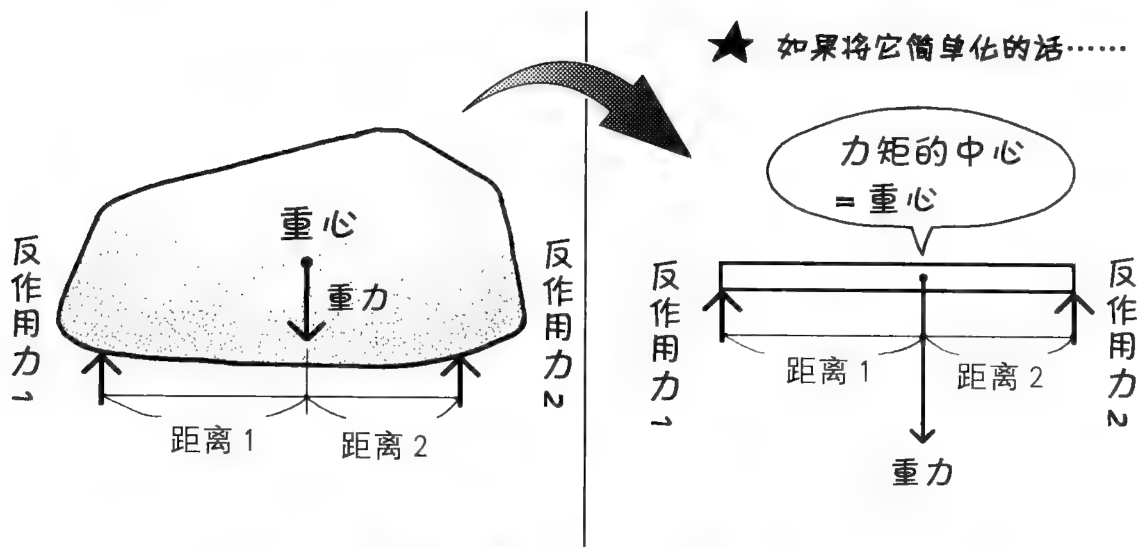
=重力围绕重心（质心）产生的力矩为零

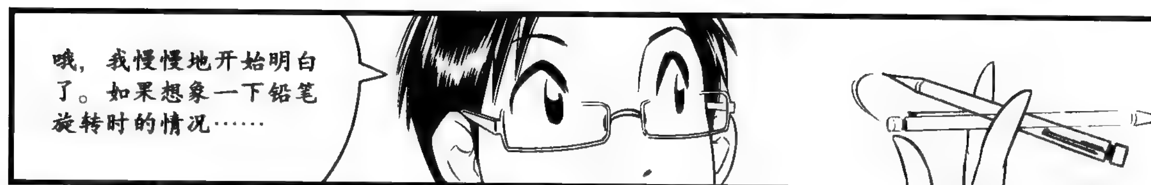




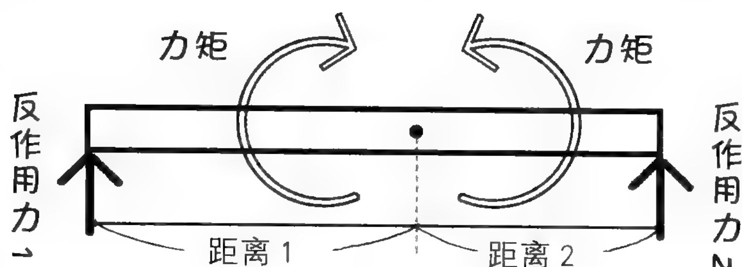






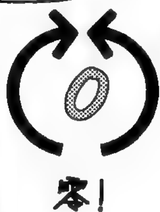


- 因为重力力臂为零，所以不会起到力矩的作用
- 反作用力 1 会在顺时针方向产生反作用力 1× 距离 1 的力矩
- 反作用力 2 会在逆时针方向产生反作用力 2× 距离 2 的力矩





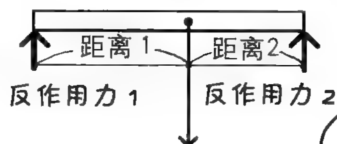
没错！并且如果回忆一下重心的特点就能够明白这两个力矩是平衡的，其合计为零。



零！

力矩平衡方程式是

反作用力 1× 距离 1= 反作用力 2× 距离 2



就是这样吧。

没错！如果将它与刚才的重力(=反作用力 1+反作用力 2)(力平衡方程式）合在一起，求一下这两个方程式的解。

反作用力 1= 重力 × 距离 2 ÷ (距离 1 + 距离 2)

反作用力 2= 重力 × 距离 1 ÷ (距离 1 + 距离 2)

就能够得出如上所示的结果，即能求出反作用力 1 和反作用力 2。

嘞！
你太厉害了！

原来如此！要求出作用于物体的力矩，只要注意物体的重心就可以了！

正是如此！力平衡方程式和力矩平衡方程式是在处理力学问题上重要的基础知识哟。

你们一定要好好地记住它们的思考方法！

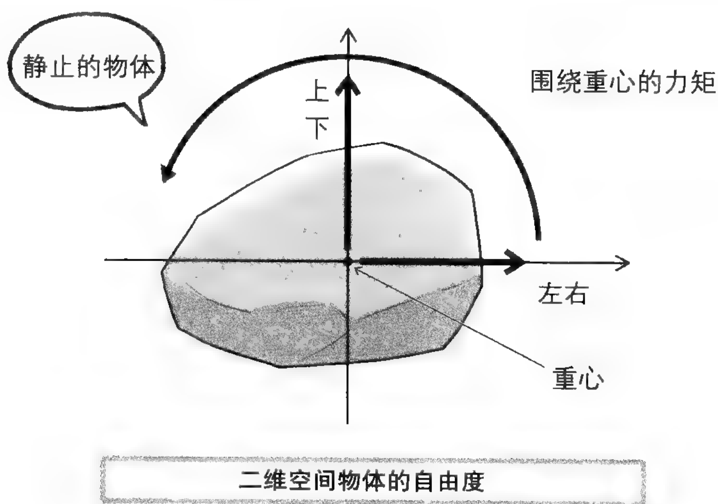
质实刚健

三维问题和自由度

之前我们解决的石头问题是**二维问题**，此时只考虑了重力作用。那么，如何在三维空间上来思考它呢？其实在三维问题上对于**静止物体**而言，**力平衡方程式**和**力矩平衡方程式**依然成立，并且重心还是很重要。



作用于静止物体上的所有力合计为零。另外，即使把静止物体的某个部位砍掉，作用于它上面的力仍然处于平衡状态。利用这一点，就能够用数学来表示并解答力学问题。

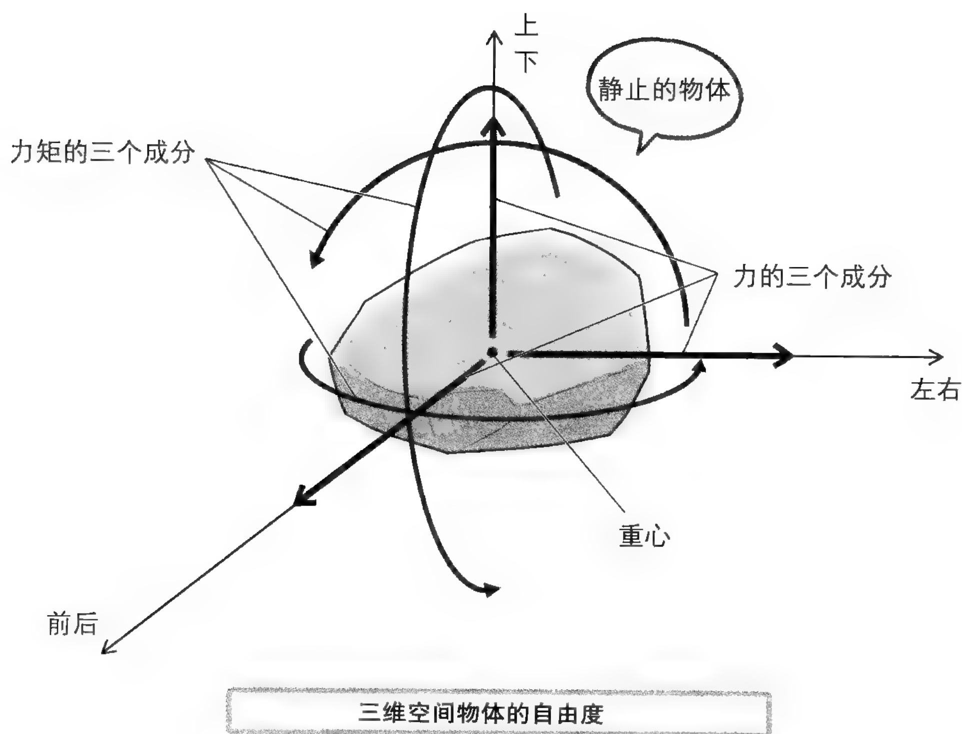


二维空间物体的自由度

首先让我们来看看二维空间的石头。在二维平面中，物体运动包含如图所示的上下及左右的两个移动和平面内的旋转。

当物体静止时即物体**不移动、不旋转**时，（物体被固定时包含反作用力）上下、左右各个方向的**力合计为零**，围绕重心的**力矩也合计为零**。

另外，让我们来数数上图中所描绘的自由度的数量。有三个吧？也就是说**物体能够自由运动方向的个数是三个**。在结构力学上将它们称作**"三自由度"**。



三维空间物体的自由度

下面是关于三维空间的石头问题。

这稍微有点难，如上图所示，当放置在空间的物体不向上下、前后、左右方向移动，不围绕上下、前后、左右方向的轴旋转时，（物体被固定时包含反作用力）**上下、前后、左右各个方向的力合计为零，围绕上下、前后、左右各轴的力矩合计为零**。

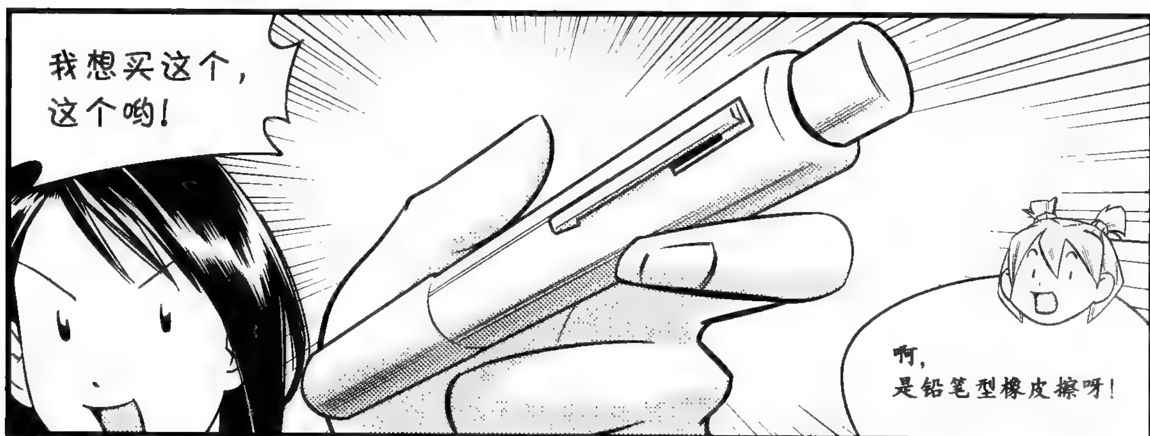
并且上图的自由度数量为六个。也就是说**物体能够自由运动方向的个数是六个**。在结构力学上将它们称作"**六自由度**"。

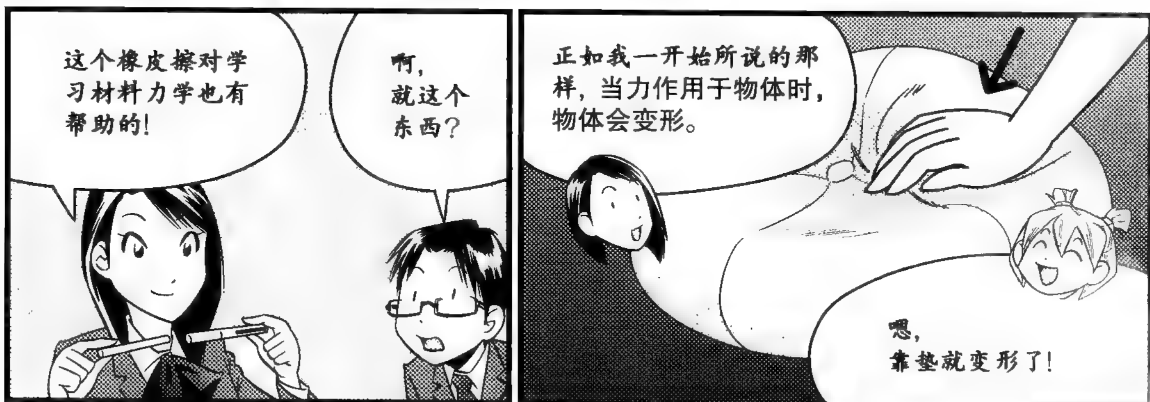
自由度多的三维问题比较难，要解决三维问题，首先要好好地理解二维问题。

3 杆件受到的力

橡皮擦的例子（力和变形）









★ 如果要将物体因力的作用发生的变形大致地表示出来，就是这些。

普通的状态

① 因压缩力（压缩载荷）而产生的压缩变形

② 因拉伸力（拉伸载荷）而产生的拉伸变形

③ 因弯矩（弯曲力矩）产生的弯曲变形

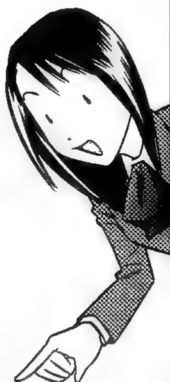
④ 因扭矩（扭转力矩）产生的扭转变形

从现在开始让我们来具体地探讨一下这四种变形吧！

被按压（压缩力）



首先请回忆一下西本坐在椅子上的情形。
椅子的这个部分会承受人的重量和来自于地板的反作用力。

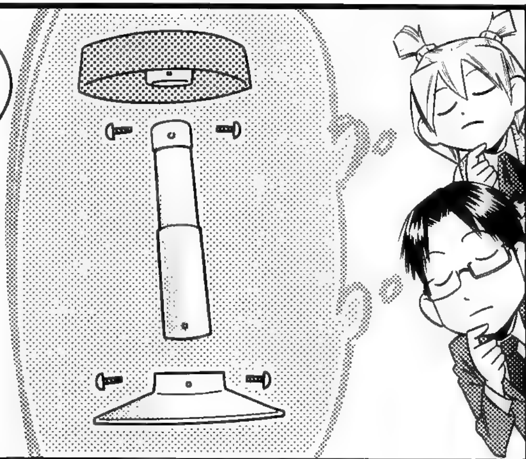




我们把像这样挤压椅子的力叫做压缩力（或压缩载荷），把受到压缩力的杆件叫做“柱形构件”。
嗯，虽然用肉眼看不到，但是这部分也会发生压缩变形吗？



没错！即使我们用肉眼看不见，但是我们要意识到每个零件都受到了一定的力，这一点很重要。



被拉伸（拉伸力）



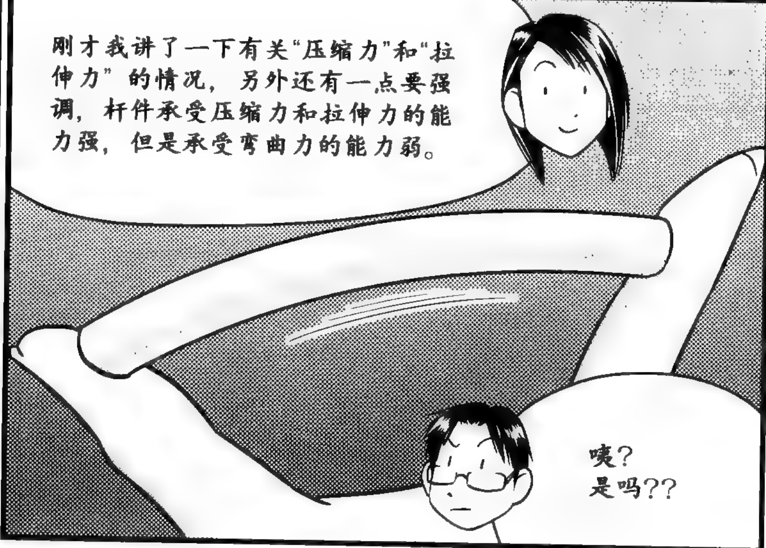
第二点请想象一下西本抓住吊在屋顶上的杆件的情形。



哎呀，这是什么姿态啊！
噗噗，西本的样子很傻。
想要拉伸它的力会作用于这个杆件。我们将这样的力叫做拉伸力（拉伸载荷）。



虽然我们用肉眼看不到，但是却发生了拉伸变形。
要好好地记住这些哦！



刚才我讲了一下有关“压缩力”和“拉伸力”的情况，另外还有一点要强调，杆件承受压缩力和拉伸力的能力强，但是承受弯曲力的能力弱。
咦？是吗？？

你看，将牙签弯曲一下就能轻易地将它折断吧？

弯曲

咔嚓

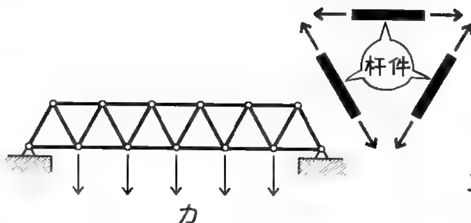
确实很容易就断了。

因此要制造出结构牢固的物体，只考虑“压缩力”、“拉伸力”就可以了。

基于这种想法便诞生了桁架结构（truss structure）。这种结构在桥梁结构中经常见到。

这种结构虽然由很多杆件构成，但是将它们一一分解来考虑的话，每个杆件都会受到拉伸力和压缩力。

那就是桥的形状啊！

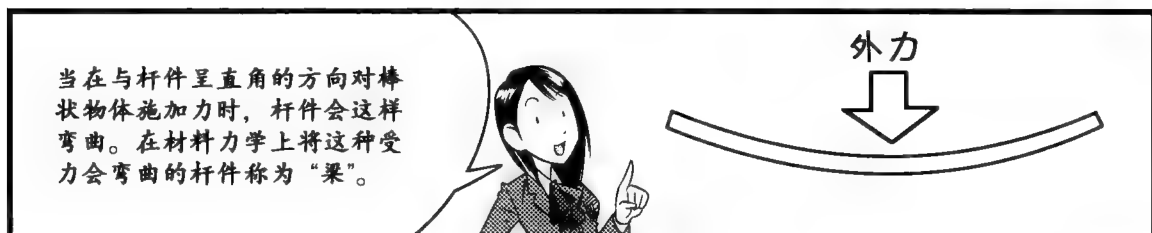


嘿！还真有趣啊！

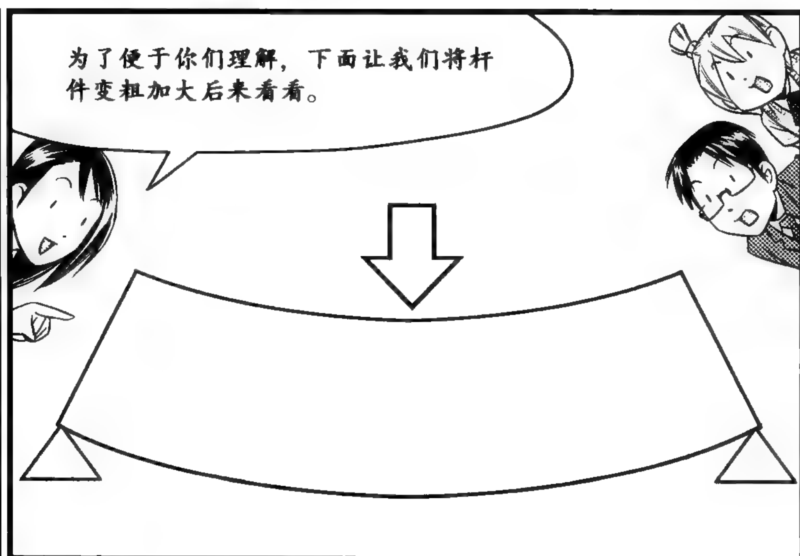
弯曲（弯矩和剪力）


下面来看第三个，请想象一下西本练单杠时的样子。

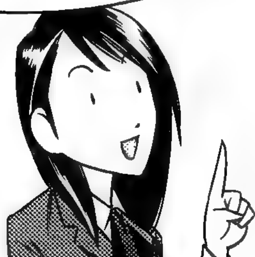

西本好像会翻转上杠哦！
没错，但这不关你事。

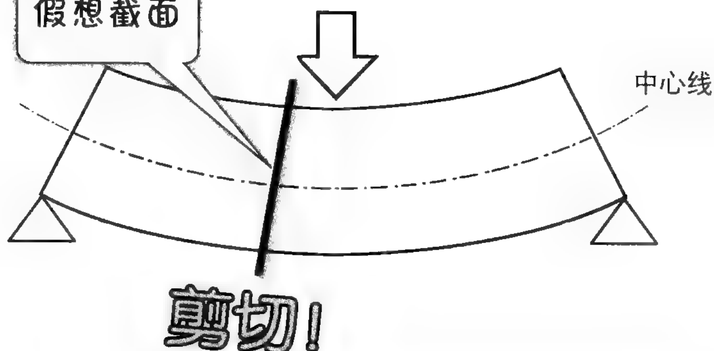

当在与杆件呈直角的方向对棒状物体施加力时，杆件会这样弯曲。在材料力学上将这种受力会弯曲的杆件称为“梁”。
外力


这里的弯曲就是指弯曲变形吧！
嗯。只不过此时的作用力有些复杂。


为了便于你们理解，下面让我们将杆件变粗加大后来看看。

这个稍微有点难，如果在这里假想用一截面将杆切开※，就会容易理解。

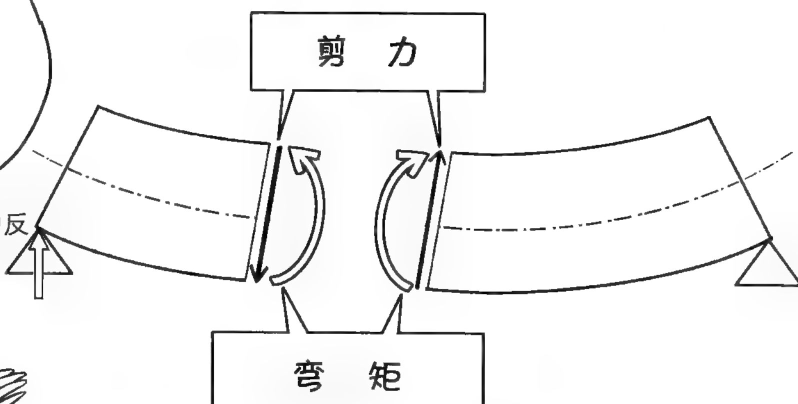




※ 关于**假想截面**的详细内容将会在第 2 章之后说明

实际上当物体这样弯曲时，在物体内部弯矩和剪力（又名“剪切力”）正在发挥作用。





哇，既有力矩又有力吗？

总觉得好像很难……



我将会一一解说弯矩和剪力。



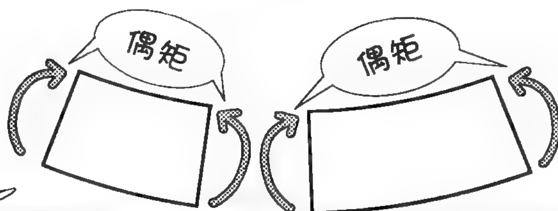
首先弯矩是指会使杆件弯曲的力矩。方向相反的力矩会分成两组，

从两侧作用于杆件，这样弯矩会处于平衡状态。



弯矩

↓刚才假想的被截断的图也会由此处于平衡状态。



由于这两组力矩的作用，左右两边会弯曲啊！



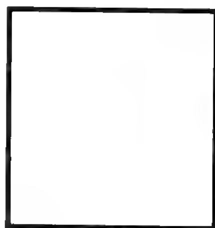


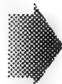


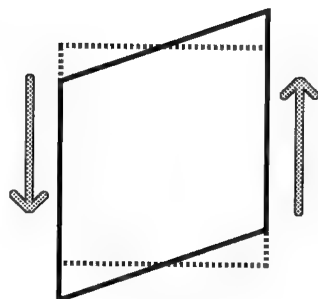
因为要使杆件旋转的力处于平衡状态，所以感觉杆件是弯曲的。

并且剪力（剪切载荷）是作用于同一物体上的两个距离很近（但不为零）且大小相等的平行力。

要使长方形的东西变成平行四边形，就需要“使其发生位移（偏移）的力”，这个力也是剪力。

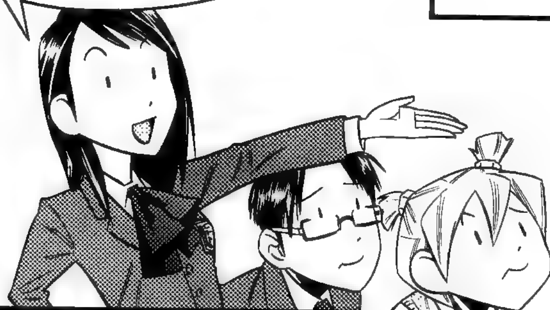






剪力

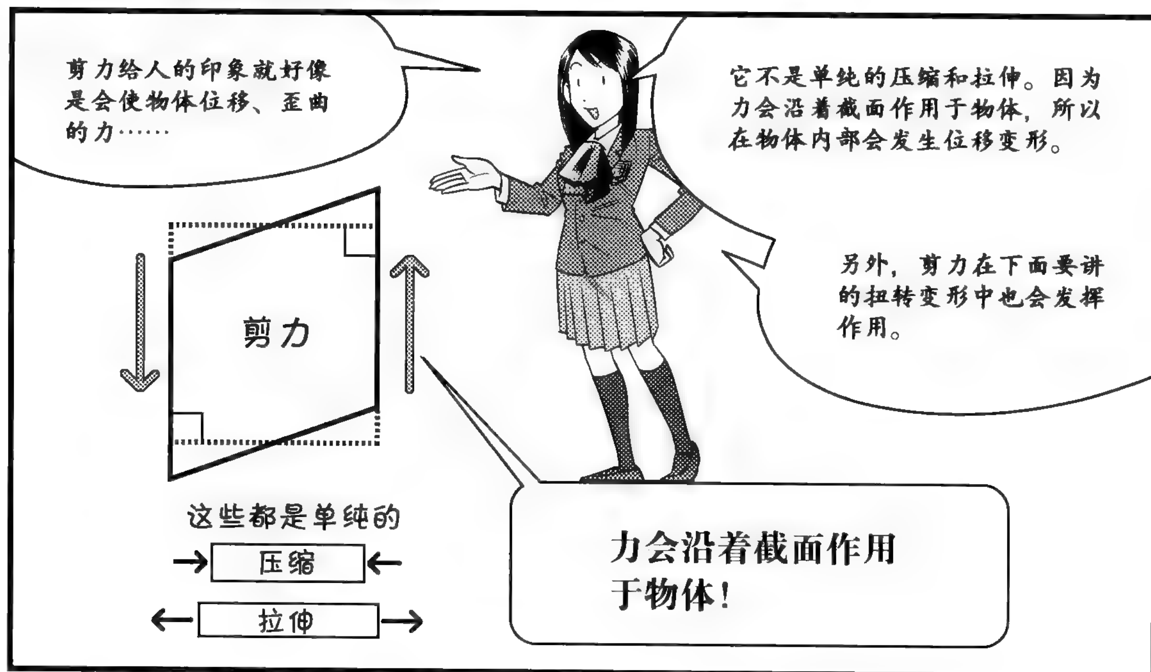
（剪切载荷）



位移……

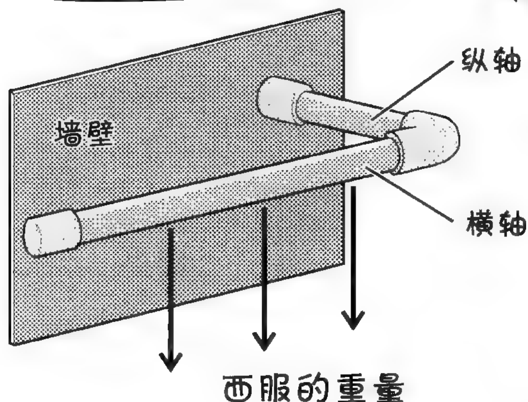


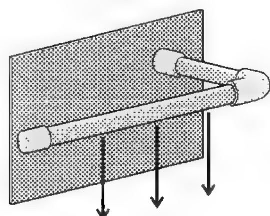
※ 有时不产生剪力也会发生单纯的弯曲变形。



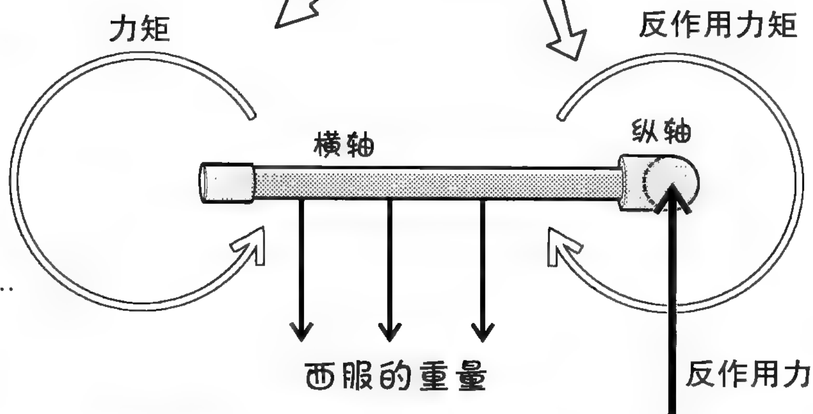


扭转（扭矩）





★ 从正侧面看的话……



这个反作用力矩会围绕杆轴施加让它旋转的力。

来自于纵杠的反作用力矩

$M = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3$

这就是扭矩

l_1 l_2 l_3

P_1 P_2 P_3

来自于纵杠的反作用力

$F = P_1 + P_2 + P_3$

★ 从另外一个角度看的话……

扭矩

像这样会使杆件扭转的力就是扭矩。

将传递扭矩的杆件叫做“轴”。

呵呵，扭转就好像在拧毛巾一样吧！

喂，你们对压缩、拉伸、弯曲、扭转这几种变形都大致了解了吧？

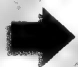
是的！

嗯

不过，橡皮擦先生还真惨，会遭遇各种变形……

竟然还同情起橡皮擦来了……

4 物体受力会变形



静定问题和超静定问题



我们在考虑纪念碑石头受力状况时使用了“力”和“力矩”的平衡方程式。但是也有一些问题仅凭这两个平衡方程式是无法解决的。好像除了力和力矩外，变形状态也很重要。

据说在材料力学上，**仅凭这两个平衡方程式就能解出全部未知力的问题被称作“静定问题”，单凭这两个平衡方程式不能解出全部未知力，还必须进一步地考虑到物体变形才能解出全部未知力的问题被称为“超静定问题”。**

或许这有点难，让我们一起来看看这些问题吧！

下面我要介绍有关弹簧的问题。首先让我们来确认一下弹簧的特点。

胡克定律

力 = 劲度系数（弹性系数）× 伸长长度（压缩长度）

弹簧的伸长（缩短）与其所受外力成正比

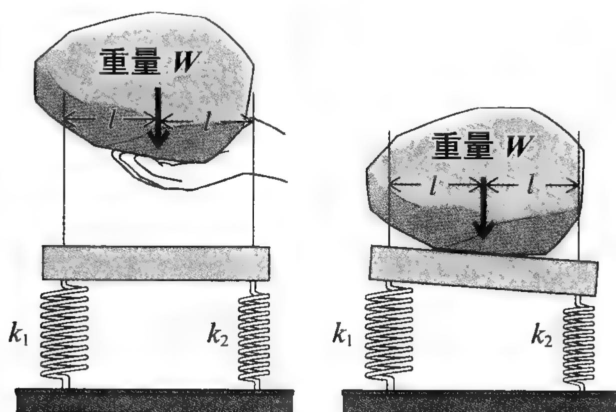
弹簧受力伸长的状态	弹簧受力缩短的状态
原来的长度 伸长的长度 力	原来的长度 缩短的长度 力

在胡克定律中，其实包含着非常重要的意义，关于这一点之后再做介绍。

在力学上会频繁地出现弹簧问题，我们可以将弹簧看做“表示力和变形关系的物体”、“变形物体的代表”。

< 静定问题 >

如下图所示，有两个弹簧：弹簧 1 和弹簧 2。



假设重物的重量为 W，两个弹簧的倔强系数分别为 k_1、k_2，请求出这两个弹簧各自所受到的力 P_1、P_2 和这两个弹簧各自的伸缩长度 u_1、u_2。

首先是静定问题。

与纪念碑的石头问题（P31）一样，让我们来考虑这个问题中的力平衡方程式和力矩平衡方程式。

$W=P_1+P_2$ **（力平衡方程式）**

因为这两个力矩距离放置重物位置的力臂长度相同，所以

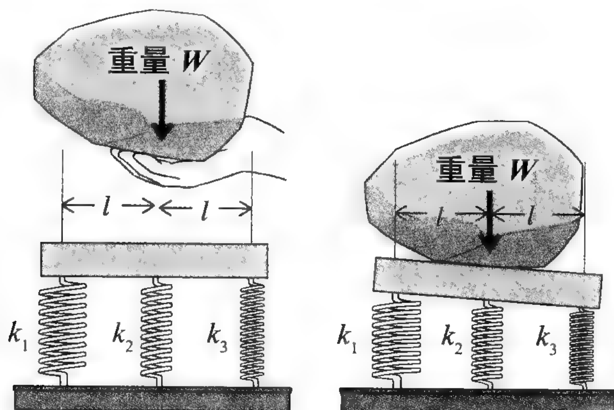
$P_1 l=P_2 l$ **（力矩平衡方程式）**

根据这两个公式，可以得出 $P_1=P_2=W/2$。根据胡克定律可以得出弹簧的伸缩长度分别为 $u_1=W/(2k_1)$、$u_2=W/(2k_2)$。

这样就将此题顺利地解出来了！

<超静定问题>

如下图所示，有三个弹簧：弹簧 1、弹簧 2 和弹簧 3。



假设弹簧 2 位于弹簧 1 和弹簧 3 的中间点。当重物的重量为 W、三个弹簧的倔强系数分别为 k_1、k_2、k_3 时，请求出这三个弹簧各自所受到的力 P_1、P_2、P_3 和这三个弹簧各自的伸缩长度 u_1、u_2、u_3。

下面是超静定问题。这与刚才的静定问题有何不同呢？那就是弹簧数量不一样。**因为未知数增加，所以如果不增加方程式就得不出答案。**

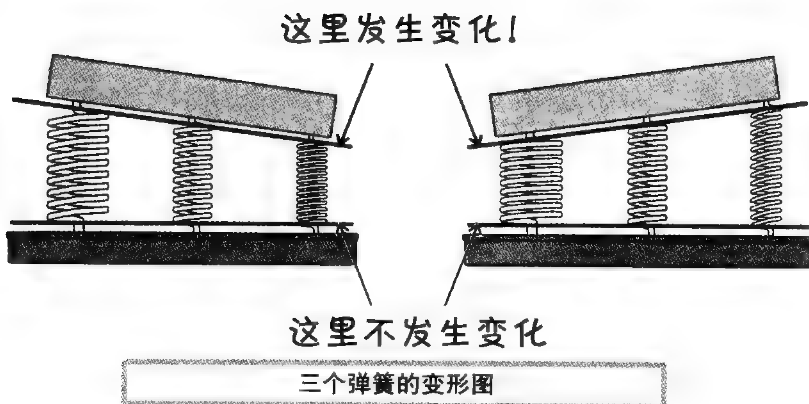
首先与刚才的静定问题一样，让我们来考虑这个问题中的力平衡方程式和力矩平衡方程式。

$P_1+P_2+P_3=W$（**上下方向的力平衡方程式**）

$P_1l=P_3l$（**围绕杆件中央点的力矩平衡方程式**）

接着让我们来**想想弹簧变形的样子**。

如果下面的台基和上面的台子都不会变形，只有上面的台子发生倾斜，那么三个弹簧的变形状况如下图所示



三个弹簧的变形图

我们**可以用公式将这个变形条件表示出来。**

因为弹簧 2 位于弹簧 1 和弹簧 3 的中间点，所以其伸缩变化程度也是弹簧 1 和弹簧 2 伸缩变化程度的中间值。

根据这一思路，关于弹簧 1 伸缩长度 u_1、弹簧 2 伸缩长度 u_2、弹簧 3 伸缩长度 u_3 之间会有如下关系式成立。

$u_3-u_2=u_2-u_1$（**物体变形条件式**）

根据以上三个公式和胡克定律（各个弹簧受力与弹簧伸缩的关系），可以求得

$$u_1=\frac{2k_3}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W \qquad P_1=\frac{2k_1k_3}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W$$

$$u_2=\frac{k_1+k_3}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W \qquad P_2=\frac{k_2(k_1+k_3)}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W$$

$$u_3=\frac{2k_1}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W \qquad P_3=\frac{2k_1k_3}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W$$

（这个计算如 P60 所示）

也就是说，**静定问题**通过力平衡方程式和力矩平衡方程式就能够解出。而**超静定问题**除了这两个公式外，还需要**物体变形条件式**。



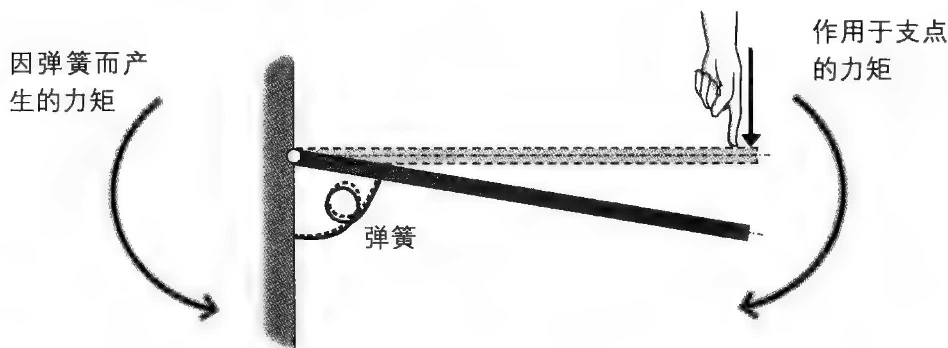
微小变形和有限变形



在考虑各种构件时，一般变形很小时，就会按照没有受力时的“本来形状”来计算力。但是有时也不能因为变形小就给予假设。

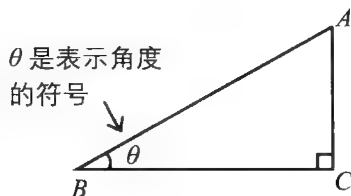
我们将那些小得可以忽略其影响的变形叫做“微小变形”，将非此类的小变形叫做“有限变形”。它们到底是怎么回事呢？让我们来一起看看例题！

请试着想象一下，假设有如下图所示的杆件和弹簧。也可以将它看做是理想化了的钓鱼竿。



杆件由能自由旋转的图钉固定在墙壁上。如果从上面按一下杆件，杆件就会运动。此时，因为这个按压力，会产生**作用于支点的力矩**，并且弹簧为了阻抗该力矩，还会**产生力矩**。

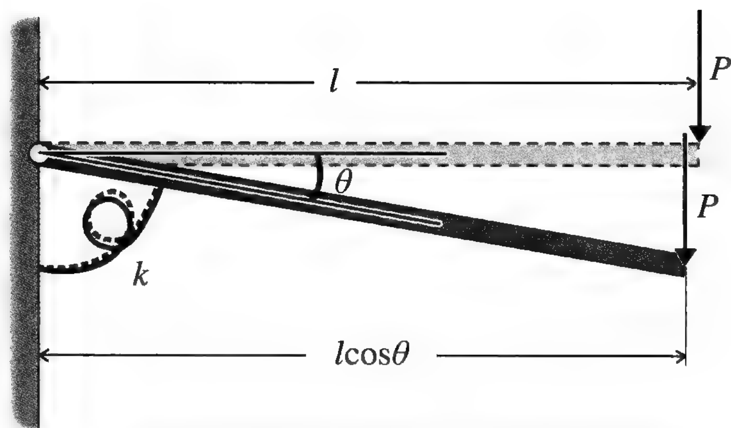
另外，让我们用公式来分别表示这两个力矩。请回忆一下高中时曾学过的三角函数。



$$\frac{BC}{AB} = \cos\theta$$

可以表示为

$$BC = \cos\theta \times AB$$



因杆件的旋转，力矩的力臂长发生变化

假设作用于杆件的力为 P、力臂长为 l、杆件旋转的角度为 θ。

此时如果墙壁上的弹簧 k 为阻抗力矩与旋转角 θ 成正比的弹簧，则**因弹簧产生的力矩** $=k\theta$。

如果当力 P 作用于杆件右端，使杆件倾斜角度 θ 后，杆件处于平衡状态，则该力矩的力臂长为 $l\cos\theta$，所以

作用于支点的力矩 = 力 × 力臂长度 $=Pl\cos\theta$。

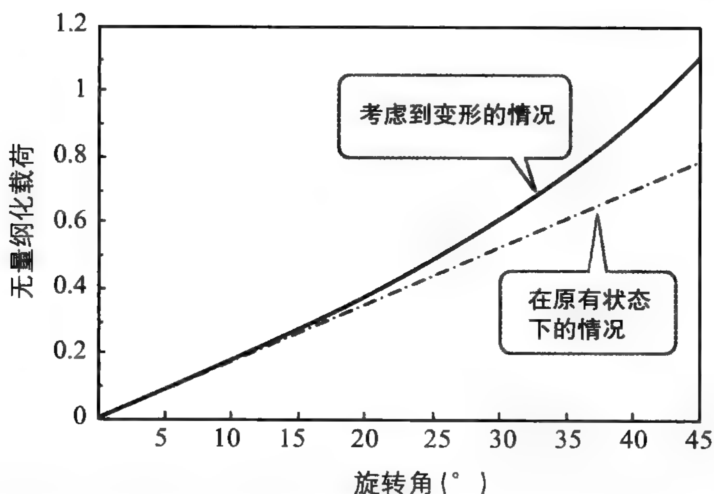
当这两个力矩平衡时，$Pl\cos\theta=k\theta$ 这一关系式成立。

因此力 P 与旋转角 θ 的关系为

$$P=\frac{k}{l}\frac{\theta}{\cos\theta}$$

另外，还有一个重要的地方。关于力 P 和旋转角 θ 的关系式，如果利用变形之前的状态的力臂长 l，则 $P=(k/l)\theta$。

也就是说，力臂长度变化、杆件**发生变形时的情况**和**变形之前状态下的情况**，其计算结果会不一样。



考虑旋转所引起力臂长度发生变化的情况与不考虑该变化情况时，力和旋转角的关系不同

让我们来看看曲线图吧！利用 θ 为零时的力臂长度所得到的力与旋转角度的关系为：当 θ=5°时，力会产生 0.4% 的差别，当 θ=10°时，力会产生 1.5% 的差别。因为 θ 不同，力会稍有差别。

由此我们得知，如果特意地考虑到 $\cos\theta$ 的计算，即使是使用最初的力臂长度也不会有太大问题。这就是假设“**微小变形**”的计算的意义。

因为在机械器件和建筑物中所使用的金属、混凝土等材料的变形较小，所以很多情况下即使利用其变形前的尺寸和形状来计算力平衡问题也不会有太大的差别。

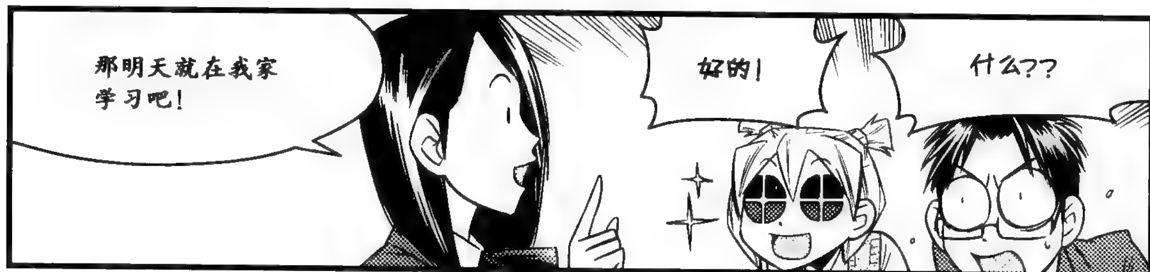
但是在这个杆件问题中，当 θ=30°左右时，力会形成 13.4% 的差别，这已经不能再被称为很小的差别了。

我们将那些不能忽略变形的问题叫做“**有限变形**”问题或“**大变形**”问题。

一般解决有限变形问题很费劲，如果有可能都会在假设微小变形后给出答案。但是，不能够忽略太大的差别。这也是令人烦恼之处啊。应该将“**可以忽略的变形**”的范围设定到何处呢？设计者也必须考虑到这种情况而画出一条这样的线。


那么今天就讲到这里。明天放学后我们再一起努力学习吧!
喂，尾濑会长，明天是星期六，放假哦。


我明天已经有了重要的安排，我要一个人去逛逛旧书店……呵呵呵……
我好像没事做哦。


那明天就在我家学习吧!
好的!
什么??


等等，等等!
我明天有安排!
NONO假日很忙吧?
咔嗒


我想去参观一下会长的家!!
要当世界设计师的NONO绝对不会错过这个机会!
哎呀，
你也别期待过高，只不过是一个特别普通的房子罢了。
我的……
休息日啊……

◆ 计算的详细过程（超静定问题）

这是在 P55 中所处理的“弹簧的超静定问题”的详细计算过程。

如果利用 P_1、P_2、P_3 来表示变形条件的话，就是

$$\frac{P_3}{k_3}-\frac{P_2}{k_2}=\frac{P_2}{k_2}-\frac{P_1}{k_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_3}{k_3}-2\frac{P_2}{k_2}+\frac{P_1}{k_1}=0$$

把由力的关系式得到的关系式

$$P_2=W-2P_1,\quad P_3=P_1$$

代入上述公式得到

$$\frac{1}{k_3}P_1-2\frac{1}{k_2}(W-2P_1)+\frac{1}{k_1}P_1=0$$

整理一下得出

$$\left(\frac{1}{k_3}+\frac{4}{k_2}+\frac{1}{k_1}\right)P_1=\frac{2}{k_2}W$$

$$\Rightarrow \quad P_1=\frac{2}{k_2\left(\frac{1}{k_3}+\frac{4}{k_2}+\frac{1}{k_1}\right)}W=\frac{2k_3k_1}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W$$

按照同样的方法可以求出

$$P_3=P_1=\frac{2k_3k_1}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W$$

$$P_2=W-2P_1=\frac{k_2(k_3+k_1)}{k_1k_2+4k_1k_3+k_2k_3}W$$

第2章

应 力



1 在物体内部也有作用力

用假想的菜刀切割！（内力和假想截面）

非常简洁漂亮的房间哦！

呵，这是给你的礼物——瑞士卷。

哇啊，谢谢！待会儿大家一起吃吧！

为什么我会沦落到这个地步……

唉……

喂喂，不要没完没了地叹气。

今天我要讲一下在物体内部的作用力。

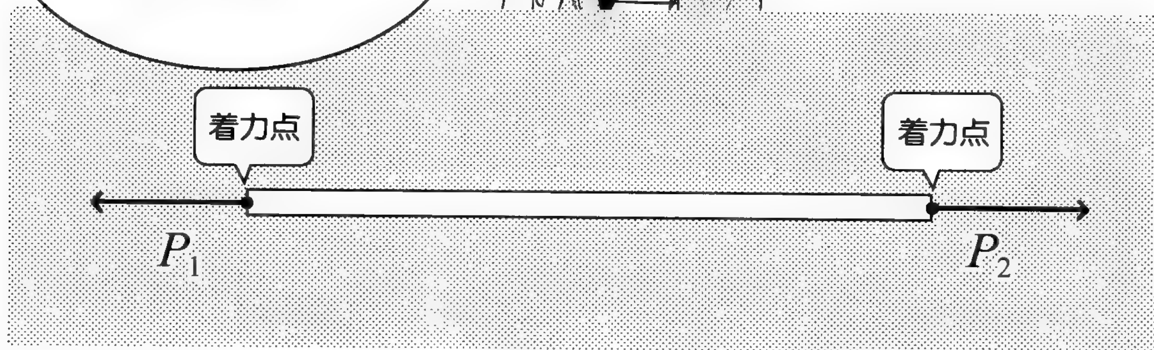
内部的作用力……??

要使用的道具就是这个！

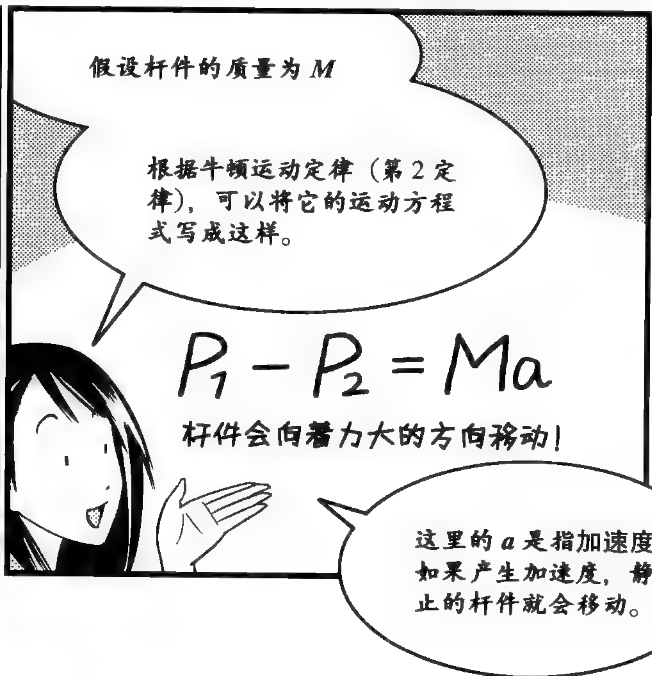
擀面杖！


你们两个人试着拉一下这根杆件。
是这样吗?
使劲儿


用自由体图表示一下杆件现在的受力状况就是这样。
实际上应该是握着杆件头部在对其施加力，但是用自由体图表示的话可以简单地认为力施加于这点。
并且NONO和西本所用的拉力未必相同，在此将你们两人所用的力分别用P_1、P_2来表示。


着力点
着力点
P_1
P_2

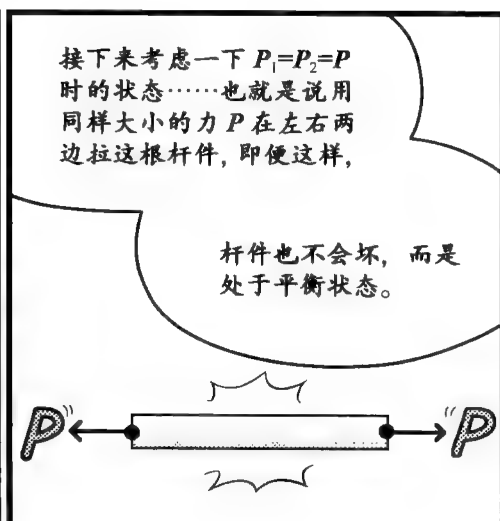

啊，这是上次学过的“拉伸”的状态。
没错!
让我们从力学的角度来思考一下被两个人拉着的杆件的状态。
使劲儿

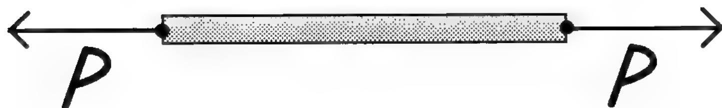

假设杆件的质量为M
根据牛顿运动定律（第2定律），可以将它的运动方程式写成这样。
$P_1 - P_2 = Ma$
杆件会向着力大的方向移动!
这里的a是指加速度，如果产生加速度，静止的杆件就会移动。


原来是这样!
如果 NONO 的力气大，杆件就会向 NONO 这边移动吧!
使劲儿
哇啊!


在材料力学上，NONO 和西本的拉力是相等的……
也就是说 $P_1=P_2$，这是杆件受力平衡、处于静止状态时的情况。
静止!
喂，用力过大杆件本身就会坏掉哦!


我知道了，我们打平了……
累死我了……
哈哈，我们还是进入正题吧。
你太弱了


接下来考虑一下 $P_1=P_2=P$ 时的状态……也就是说用同样大小的力 P 在左右两边拉这根杆件，即便这样，
杆件也不会坏，而是处于平衡状态。
P
P



你们认为此时杆件内部是什么状态呢？

什么？
内部状态，
不明白！

在这里用“假想截面”就会很方便！

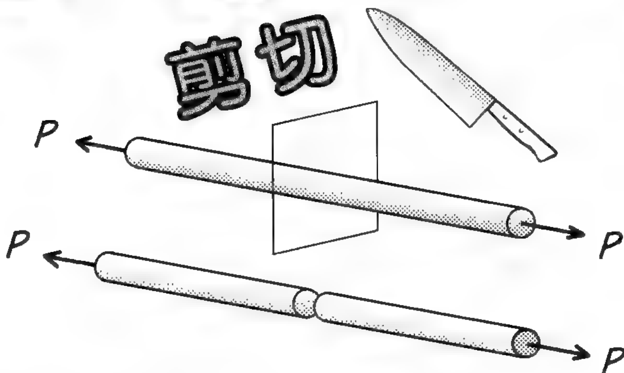
虽然我们不能够实际将物体切割开，但是我们可以在脑子里假想一个用来切割它的截面！

原来如此！
就是妄想切割它的感觉啊！

这是 NONO 发挥想象力的时候哦！

这终归是假想，假设作用力 P 依然作用于此物体，并且力处于平衡状态。

试着用假想的菜刀将刚才的图切割开……就是这样。



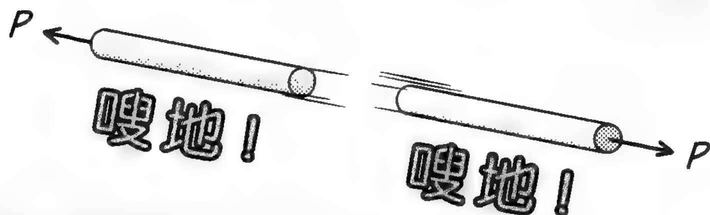
……??
这个图好奇怪！

我一想到力矩，杆件就不能静止了！

真的耶……
杆件会向左右两边分开吧……？

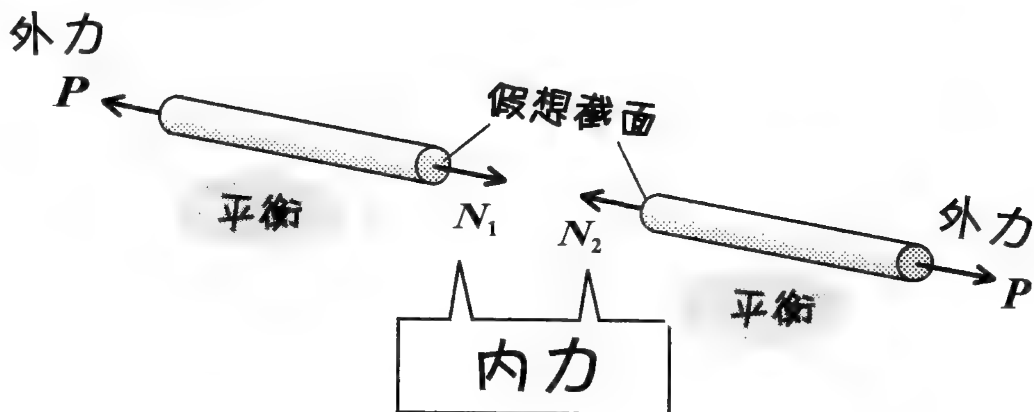
没错！因为实际上杆件是静止的，所以这样推理也很自然。

“这很奇怪！这样的话应该有某个力正作用于物体的内部——切割截面。”



确实……
否则的话不合情理吧！

是吗？
那么从力学的角度合理地思考的话就是这样！



在左边杆件的截面上，会有大小为 N_1 的力作用于该面；

在右边杆件的截面上，会有大小为 N_2 的力在与 N_1 相反的方向作用于截面，左右杆件保持平衡。

右边杆件的平衡方程式为　　$P-N_2=0$

左边杆件的平衡方程式为　　$N_1-P=0$

求解上述公式得到　　$N_1=N_2=P$

另外，根据作用力与反作用力定律可得出 $N_1=N_2(=N)$，但是通过力平衡方程式也能得出这一关系。



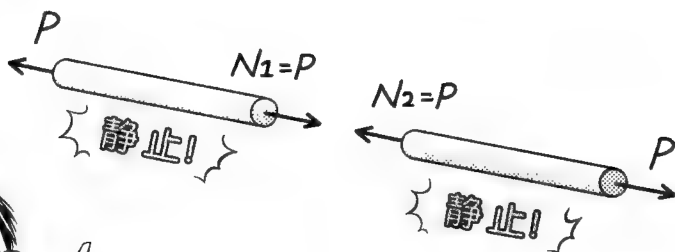
哦，确实这样的话左右杆件都是静止的！

在材料学上将这样的力（$N_1=N_2$）叫做杆件的“内力”

它是指当外力作用于物体时在物体内部作用的力。知道内力后就能够合理地理解现象。

原来是这样啊，那么……

也就是说，内力的大小应该是 P，



如果理解了内力，一切就合乎情理了，而且也会明白左右的杆件会静止。

原来如此……合乎情理后关系式就会成立了……

“这样思考的话就能够解释现象”，这是在追求合理性……

这就是力学的有趣之处吗……？

唔！我渐渐地明白了，现在很兴奋！

我想给刚才假想的菜刀取个名字！

假想维度切割刀或者超烈波空间想象整刀！

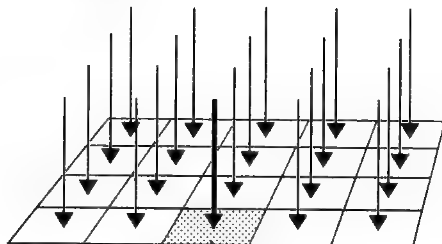
你是自由发挥的吧！

喂……真令人心痛，你取的名字也太烂了吧！

2 如何来表示内力

何谓应力?（应力）

◆关于压强



所谓压强是指作用于单位面积（$1m^2$）上的垂直方向的力。

例如，当力 F(N) 作用于面积 A(m^2) 时，可以用如下公式来表示压强 P(Pa)。

$$压强\ P = \frac{力\ F}{面积\ A}$$

力：1N

面积：$1m^2$

$$压强：1Pa = \frac{力：1N}{面积：1m^2}$$

注意一下公式的单位就能发现压强的单位 Pa 就是 N/m^2。要牢牢地记住 $Pa=N/m^2$。

接着我来讲解一下有关应力的知识。

力和压强

内力和应力

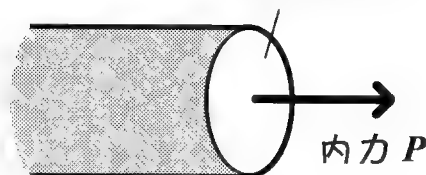
“内力和应力”与“力和压强”的关系很相似。

我们刚才已经学过内力了，可是它们有什么相似之处呢？

请看这个！

★当内力 P（N）作用于面积（假想截面的面积）A（m^2）时，表示应力的关系式如下。

$$\text{应力}\ \sigma\ (\text{Pa}) = \frac{\text{内力}\ P(\text{N})}{\text{面积}\ A(\text{m}^2)}$$



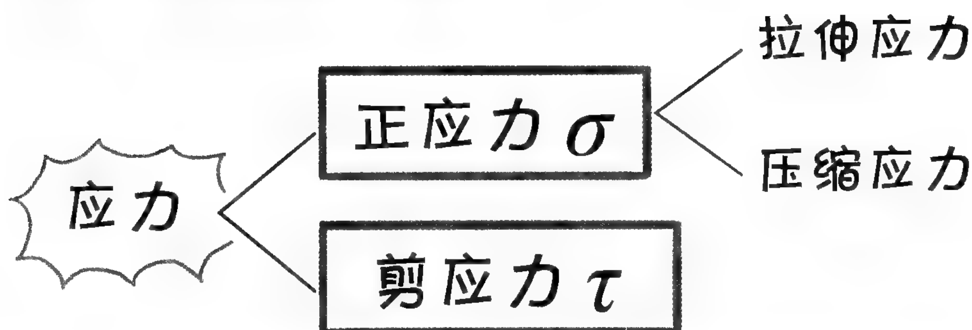
在实际计算过程中，很多情况下都用 mm^2（平方毫米）来表示单位面积，应力的单位为 N/mm^2=MPa(兆帕)

用力除以面积……也就是说应力是指单位面积上的内力。

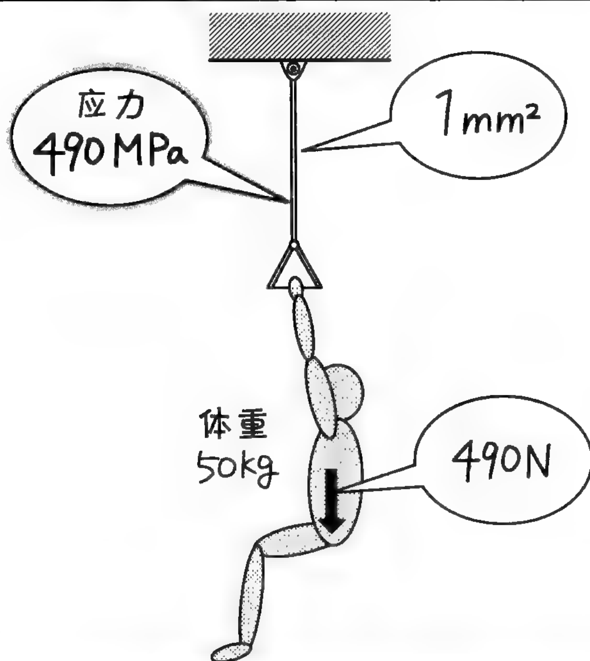
嗯，它们确实很相似。

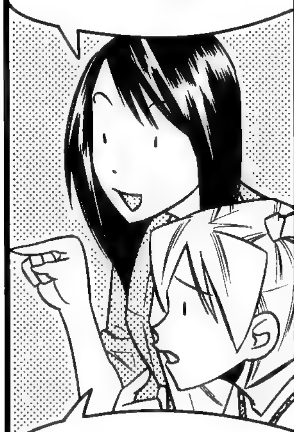
这一公式就是应力的基础。另外……

★如果进一步详细地将应力分类的话……







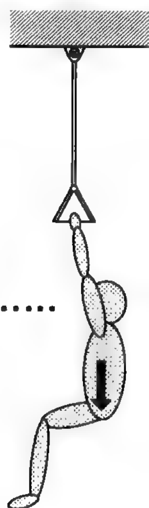


假设 50kg 的人悬挂在截面积为 1mm^2 的绳索上。
于是绳索受到的外力是 50kgf，内力也是 50kgf。
因为 1kgf=9.8N，所以 50kgf=490N。
也就是说，在绳索上所产生的应力是 490N/mm^2=490MPa。

可是那有什么用呢??

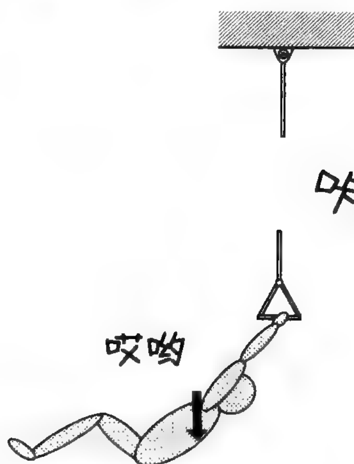
实际上如果把产生的应力与材料强度对比一下，就能够知道“材料是否会坏”！

产生的应力 < 材料强度



如果绳索材质牢固能够承受490MPa的应力，绳索就不会断！

产生的应力 > 材料强度



如果绳索材质脆弱，不能承受490MPa的应力，绳索就会断！

哦！如果“产生的应力 < 材料强度”，构件就不会坏啊！很容易理解。

确实如此！应力很重要！

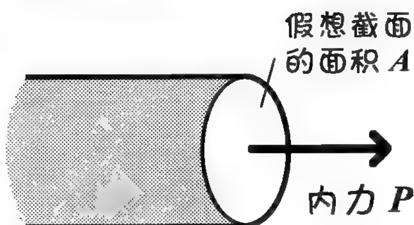
为了将来的书架，让我们一起努力吧！

注意方向（拉伸应力和压缩应力）

那么我来详细讲解一下有关应力的知识，首先是正应力（又名法向应力）！我们刚才说过可以用 σ 来表示正应力，其公式是这样。

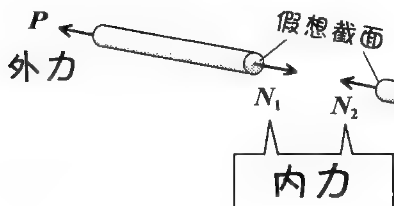
嗯，这个我已经明白了。

$$\text{应力}\ \sigma = \frac{\text{内力}\ P}{\text{面积}\ A}$$



在正应力中还分为拉伸应力和压缩应力。

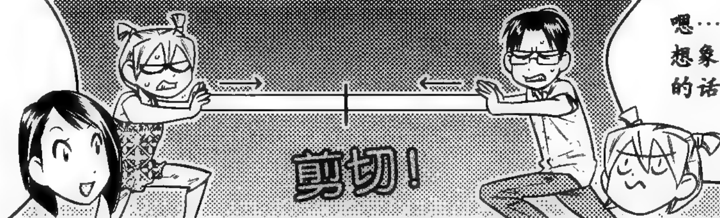
- 应力
  - 正应力 σ
    - 拉伸应力
    - 压缩应力
  - 剪应力 τ



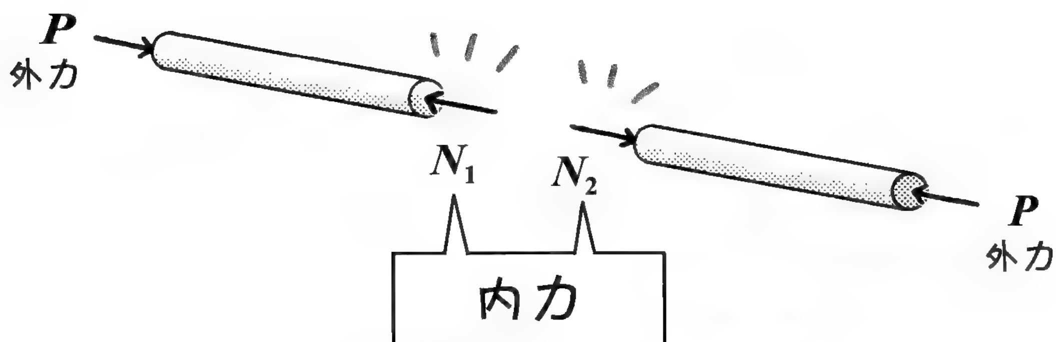
刚开始让你们两人拉拼面杖后考虑过它的内力吧？

嗯！我记得！

这次正好相反，请你们两人想象一下相互推压杆件时的状况，也就是说给杆件施加压缩力。



嗯……想象一下的话……



啊……！有重大发现！在拉伸和压缩杆件时，不仅仅是外力的向量方向，内力的向量方向也会发生变化！

没错！看一下假想截面，就是这样。

拉伸时的情况	压缩时的情况
假想截面的面积 A 内力 P	假想截面的面积 A 内力 P
拉伸应力 $\sigma = \frac{P}{A}$	压缩应力 $\sigma = -\frac{P}{A}$ 加了个负号!!

因为内力方向不同，所以也必须区分应力的方向。

原来如此，通过把压缩应力看做负值来区分它们。

沿着截面位移的应力（剪应力）

下面是剪应力（又名切应力）。可以用符号τ表示剪应力。

应力

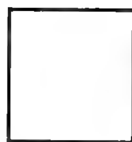
正应力 σ

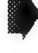
拉伸应力

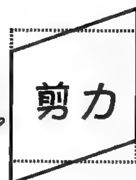
压缩应力

剪应力 τ

前面我已经讲过剪力了吧？







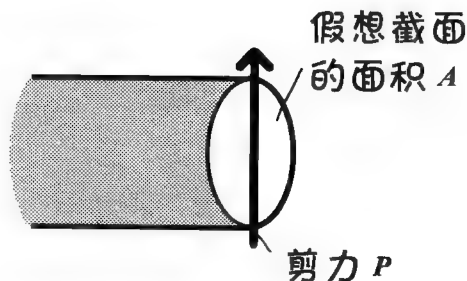
位移!

啊，是平行位移的力吧？



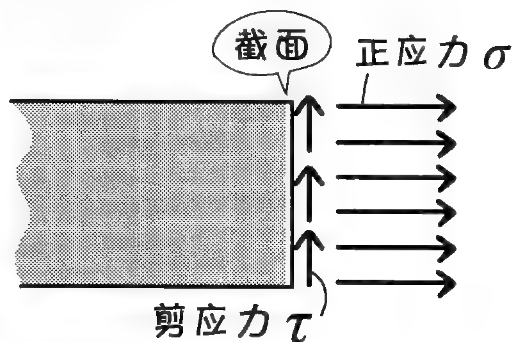
没错！
剪力会沿着截面作用于物体。
用剪力除以受力面积就是剪应力。

$$\text{剪应力 } \tau = \frac{\text{剪力 } P}{\text{面积 } A}$$



也就是说剪应力是指单位面积上所承受的剪力。

你们知道“正应力”与“剪应力”的不同之处吗？
可以试着想象一下从正侧面看杆件时的图。



哦！正应力（在日语中直接称“垂直应力”）正如其名字一样是垂直于截面的！
剪应力给人的感觉就是沿着截面移动，即与截面相切。

嗯……

那个……拉伸和压缩物体时所产生的内力都是垂直于截面的吧？

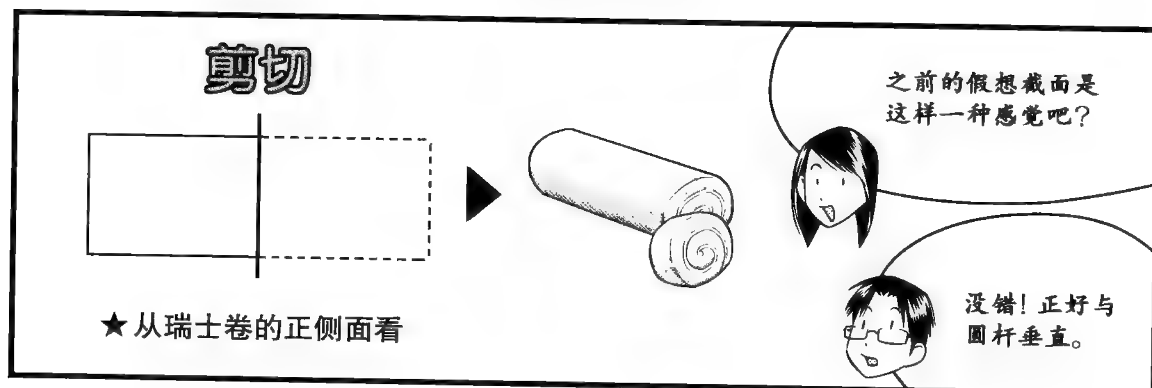
那么学习这个剪应力又有何作用？

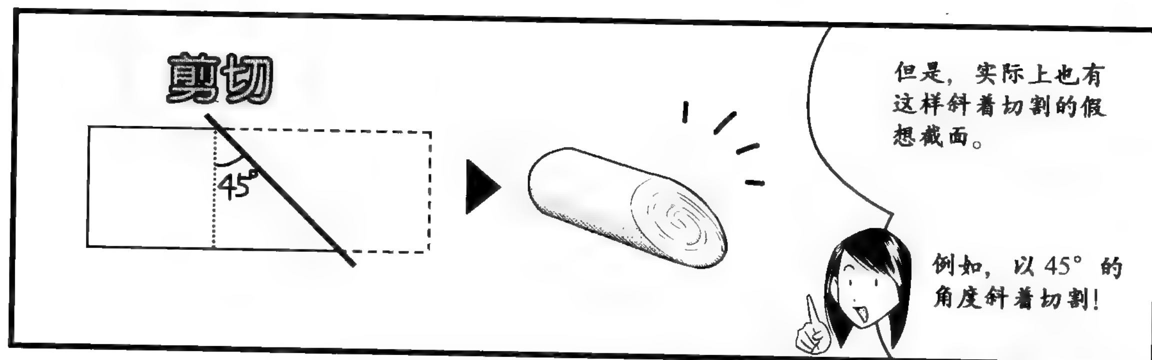
这个问题很好！
请稍等一下！

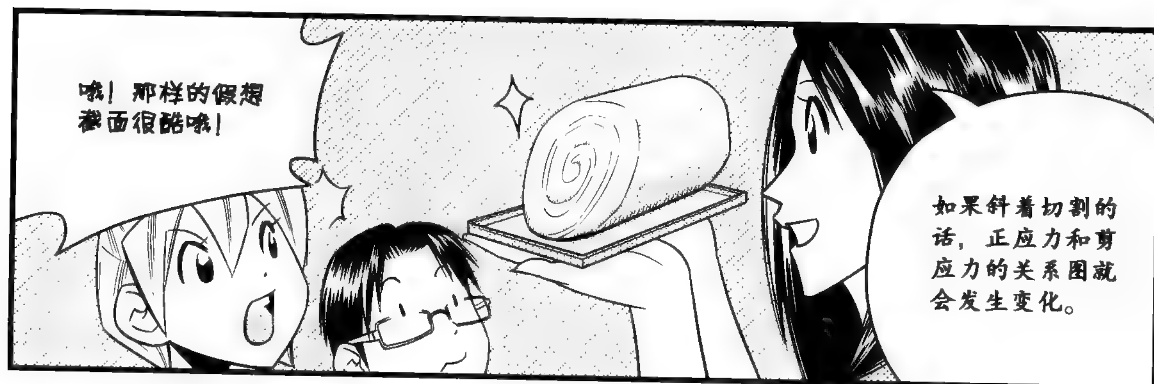
咦？

一起来吃瑞士卷吧！

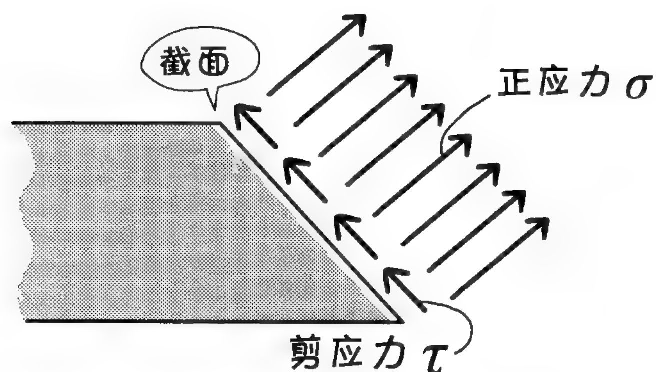

哇哈！
原来是稍微休息一下啊！
突然就休息啊！
唉，好吧，但是……
这不仅是休息哟！
也是学习之一！


剪切
★从瑞士卷的正侧面看
之前的假想截面是这样一种感觉吧？
没错！正好与圆杆垂直。

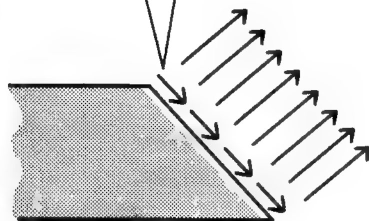

剪切
45°
但是，实际上也有这样斜着切割的假想截面。
例如，以45°的角度斜着切割！


哦！那样的假想截面很酷哦！
如果斜着切割的话，正应力和剪应力的关系图就会发生变化。

★从正侧面看倾斜截面杆件的状况



另外……
当剪应力为负值时，箭头的方向相反。



正应力垂直于截面、剪应力沿着截面（相切于截面）这一点是不会变化的。

哦！
与刚才的不同呀！

总觉得好像很难。

斜着的假想截面与剪应力关系密切。

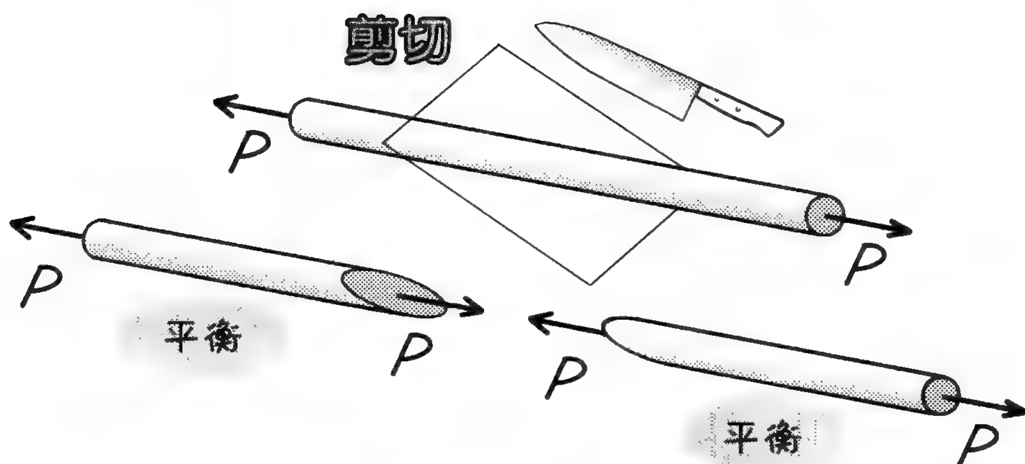
从现在开始我将详细地讲解一下。

3　应力是如何产生的

分解应力向量（正应力和剪应力）

那么关于斜着的假想截面。

首先请看此图！
无论怎么切假想截面，内力 P 的大小都不会改变。



原来如此，因为内力 P 与外力 P 平衡，杆件处于静止状态。

啊，
但是……

刚才的瑞士卷，沿着倾斜方向45°切比垂直切时看到的奶油更多！

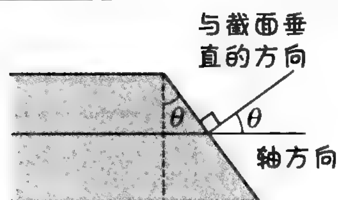
也就是说，因为切法不同，截面积会发生变化！

截面积
变大了！

啊，原来如此！这样的话即使内力不变，

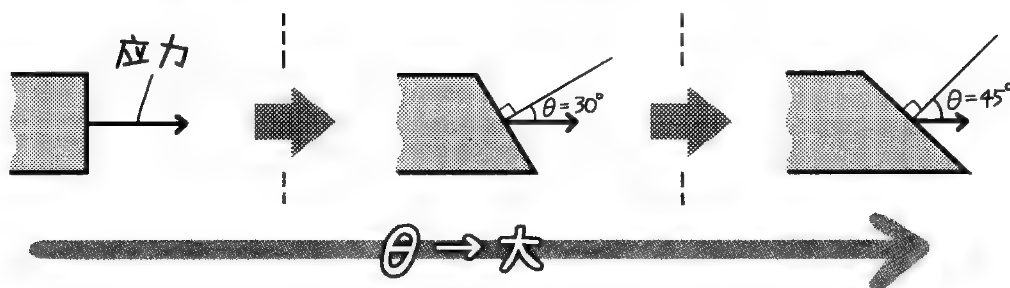
因为切法改变应力也会发生变化！

正是如此！如果分别以0°（垂直）、30°、45°来切瑞士卷的话，应力的大小会这样变化。



CHECK!

用垂直于截面的直线（叫做法线）与轴之间的角度来表示倾斜度。
另外，左图的2个θ的角度相同。

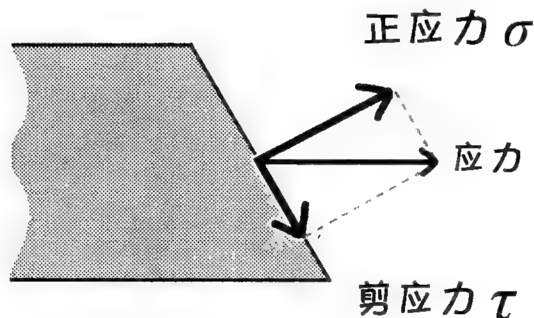


$$应力=\frac{内力}{截面积}$$

哦！因为截面积变大了，所以应力会变小。



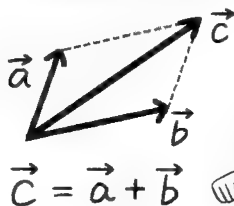
嗯！并且可以将这个应力的向量分解为正应力和剪应力。



↑σ垂直于截面，τ沿着截面

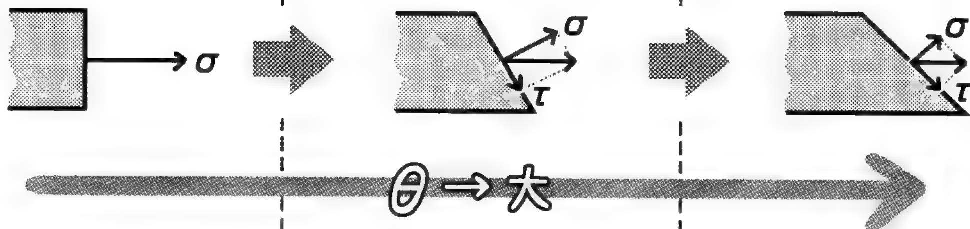
※ 关于分解应力向量的公式，将会在P83做详细说明。

对了！力是向量，向量既可以相加，也可以分解。



没错！总结一下倾斜度为 0°、

30°、45° 的假想截面上的正应力 σ 和剪应力 τ 的关系就是这样！



τ 不存在
σ 为最大

$\theta = 0°$

τ 变大
σ 变小

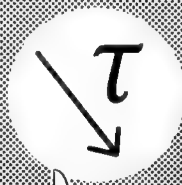
$\theta = 30°$

τ 和 σ 的大小相同
τ 为最大

$\theta = 45°$

哦，
因为角度不同，σ 和 τ 的大小会发生变化呀！

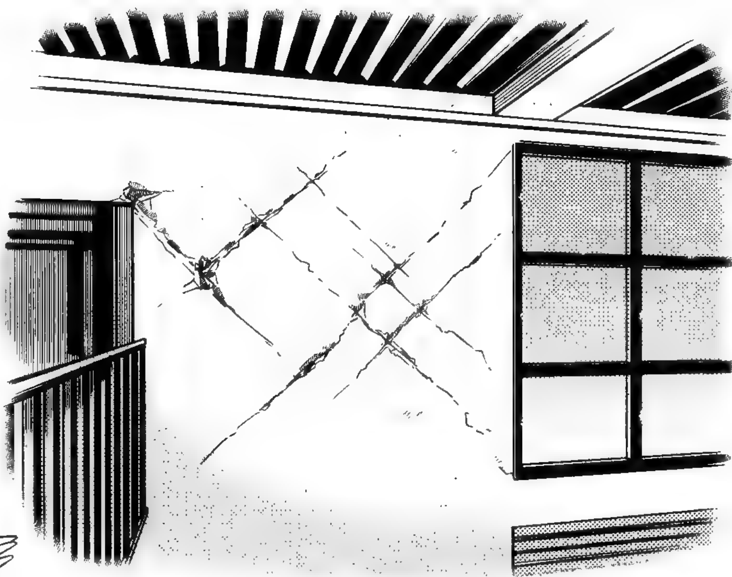
没错！希望你们知道它的变化。



即使只是单纯拉伸，在斜的假想截面上也会产生剪应力 τ，这一点很关键哟。

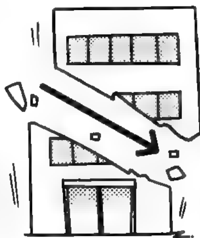
有时因受到强烈的地震，墙壁和柱子会产生裂缝……

这被称作剪切破坏，它是由剪应力引起的破坏方式。



因为混凝土耐压缩力，所以在压缩应力大的面没有遭到破坏，在剪应力最大的面（45°）遭到破坏。

啊，倾斜的裂缝还有这么深层的意义啊……



也就是说要制造不易损坏的结构体，还必须考虑倾斜假想截面的应力情况……我明白了。

现在只是让你们对应力有了一个大致的了解，要认真地求解数学公式，才能进一步地理解应力。

让我们好好地来核对一下计算过程吧！（请参照从P82开始的一部分内容）



哎呀，那就试着积极地来处理吧……



莫尔应力圆



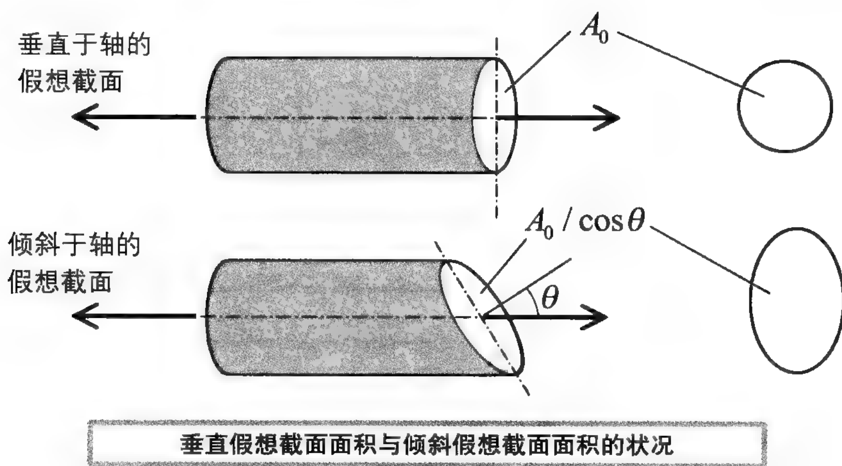
刚才我们已经学过**正应力 σ** 和**剪应力 τ** 会因为假想截面的倾斜角度的不同而发生变化。

如果读一下数学公式，就能够进一步理解这一点，并且根据数学公式还可以作出**描绘正应力 σ 和剪应力 τ 变化状况的图**。好像还有莫尔应力圆之类的东西，它到底是什么呢？

让我们边回忆三角函数 sin、cos 的计算方法，边看数学公式。

在此我将利用数学公式解说一下在倾斜假想截面上的**正应力 σ 和剪应力 τ** 的变化状况。

首先，让我们来正确理解有关角度的知识。

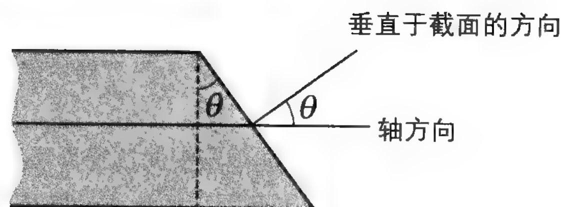


垂直假想截面面积与倾斜假想截面面积的状况

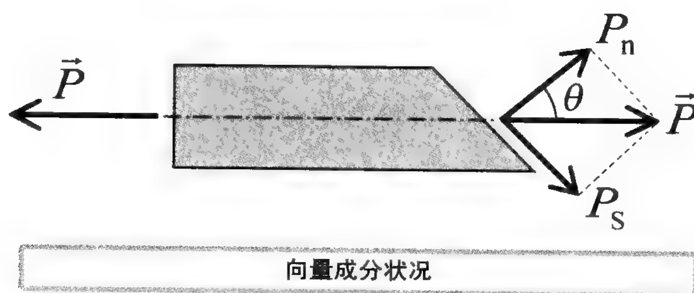
斜着切开的假想截面如上图所示。

假设在 0°（垂直于轴）处切割杆件时形成的截面积为 A_0，那么可以将在角度 θ 处切割出的倾斜截面积表示为 $A_0/\cos\theta$。

如果从侧面看就会发现如下图所示那样，假想截面的**倾斜角度**和“**垂直于假想截面的方向与轴方向之间的角度**”相等。



如果将倾斜度为 θ 的面上的内力向量写成 $\vec{P}$（$|\vec{P}|=P$），那么垂直于该面方向和沿着该面方向的成分分别为 $P_n=P\cos\theta$、$P_s=P\sin\theta$。



向量成分状况

因为应力 = 内力 / 截面积，所以应力向量为

$$\vec{t}=\frac{P}{A_0/\cos\theta}=\frac{P}{A_0}\cos\theta \quad ①$$

其大小与 $\cos\theta$ 成正比，所以如先前所示，随着截面倾斜角度的增大，应力会变小。

另外，垂直于应力向量面方向以及沿着该面方向的成分可以由各自方向内力成分的大小除以截面积导出，结果为

$$\sigma=\frac{P_n}{A_0/\cos\theta}=\frac{P}{A_0}\cos^2\theta \quad ②$$

$$\tau=\frac{P_s}{A_0/\cos\theta}=\frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta \quad ③$$

从该式我们可以看出截面的角度 θ 与正应力 σ 和剪应力 τ 的值密切相关。

也就是说，即使拉伸圆杆的状态不变，**应力成分 τ 和 σ 也会因假想截面的选择方法不同而发生变化。**

让我们牢牢地记住这一点，应力成分会因假想截面的选择方法不同而发生变化。

那么下面将利用式②和式③试着计算一下处于拉伸状态的圆杆在假想截面的角度 θ 发生改变时的正应力、剪应力。

◆ 当 $\theta = 0°$ 时，

正应力 $\sigma = \frac{P}{A_0}$　　剪应力 $\tau = 0$

◆ 当 $\theta = 30°$ 时，

$$\text{正应力}\quad \sigma = \frac{P\cos^2 30°}{A_0} = \frac{P}{A_0}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\frac{P}{A_0}$$

$$\text{剪应力}\quad \tau = \frac{P\sin\theta\cos\theta}{A_0} = \frac{P}{A_0}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{P}{A_0}$$

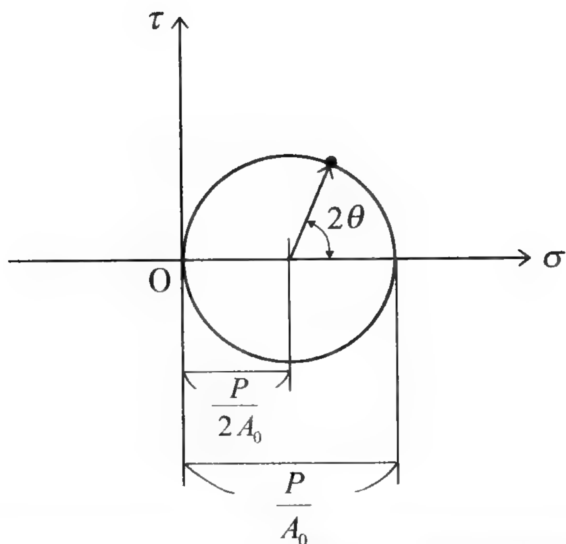
◆ 当 $\theta = 45°$ 时，

$$\text{正应力}\quad \sigma = \frac{P\cos^2 45°}{A_0} = \frac{P}{A_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{A_0}$$

$$\text{剪应力}\quad \tau = \frac{P\sin\theta\cos\theta}{A_0} = \frac{P}{A_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\frac{P}{A_0}$$

这样当 θ 在 $-90°$ 到 $90°$ 的范围内变化时，根据式②和式③计算出与之相对应的 σ 和 τ，并试着取 σ 的值为横轴、取 **τ 的值为纵轴**作图。

其结果如下图所示。



莫尔应力圆

有点吃惊吧？能形成这么漂亮的圆。

由此我们得知**应力 σ 和 τ 的组合可以用中心点位于水平轴上的圆表示出来**。

因为这是由德国的工程师莫尔所研究出来的应力圆，所以被称为**莫尔应力圆**。

如果给出截面的方向 θ，就能够利用这个图读取 σ 和 τ 的值，非常方便。

4 应力在整个面上分布不均，会因位置的不同而发生变化

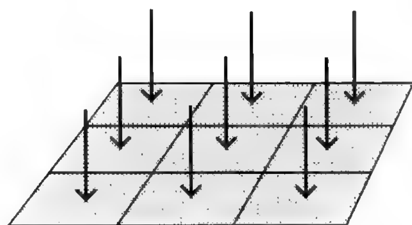
只除以面积不行!?（应力的求法）

另外，之前我们一直认为应力 = 内力 / 面积……

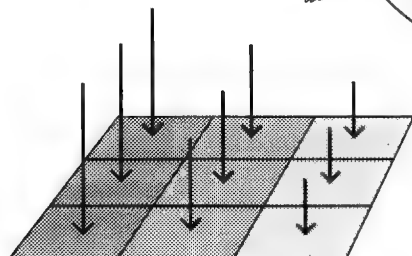
但是这一公式有时候也不通用。

咦？

只有在截面的任何一个地方所受的力都相等时才能使用这个公式。



当各个位置的受力大小不同时，不能使用这个公式。



泄气

原以为已经弄明白了，可是……

不要那么没精打采啦！

我将会介绍此时通用的应力表示方法。



利用△表示应力的方法



虽然好不容易记住了一个公式，但是这个公式有时并不通用，由此可以看出力学世界是残酷的。

但是因为接下来要学习的应力表示方法是关系到我们今后人生的重要知识，所以让我们一起来努力学习吧！

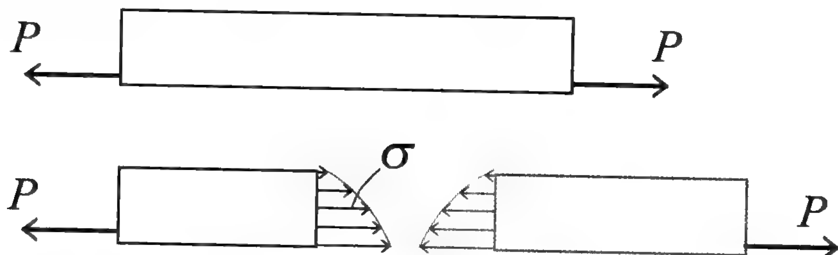
虽然会出现△、Σ、lim 之类的表示方法，但是请不要着急，这些都不会是什么难题。

△是要表示极小量时所使用的符号。Σ 表示合计（求和）。lim 是英语 limit 的缩写，表示极限。

如果向物体施加力，内力就会作用于其假想截面。

此时内力并非作用于截面上的某一点，而是分布作用于整个截面。

如果认为内力 P 均衡地作用于截面时，在截面上某个位置的应力就是 $\sigma=P/A$。但是如下图所示，当任意力作用时，**即使在一个假想载面上每个地方的应力也不会相同。**



因位置不同而发生变化的应力分布图

那么在此时如何用公式来表示应力呢？让我们来依次探讨一下这个问题吧。

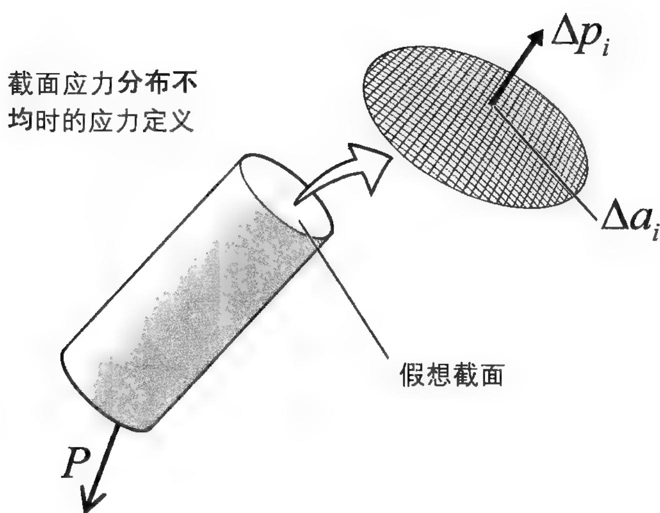
首先在这里让我们用**微面积 $\Delta\alpha_i$ 的集合**来表示**截面**，用 $\Delta\vec{P_i}$ 来表示作用于各微分面 $\Delta\alpha_i$ 上的内力。

所有微内力相加等于作用于截面上的内力。

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{p}_i$$

微面积之和等于假想截面的面积。

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta a_i$$



把圆杆的假想截面分割成非常细小时的状况

此时，如果用微内力向量 $\Delta\vec{P_i}$ 除以微面积 $\Delta\alpha_i$ 就能求出**作用于这些微面积上的单位面积的内力**。

$$\vec{t}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta a_i}$$

另外把微面积接近于无穷小时的极限

$$\vec{t} = \lim_{\Delta a_i \to 0} \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta a_i}$$

定义为**作用于假想截面上的点 *i* 处的应力。**

此时要使用在数学中学过的微分。另外应力的单位是 Pa。

当然如果使用垂直于微内力向量截面的成分 ΔP_{in} 和沿着该截面的成分 ΔP_{is}，就可以将正应力和剪应力分别定义为

$$\sigma = \lim_{\Delta a_i \to 0} \frac{\Delta p_{\mathrm{in}}}{\Delta a_i}$$

$$\tau = \lim_{\Delta a_i \to 0} \frac{\Delta p_{\mathrm{is}}}{\Delta a_i}$$

怎么样？明白它们的意思了吗？

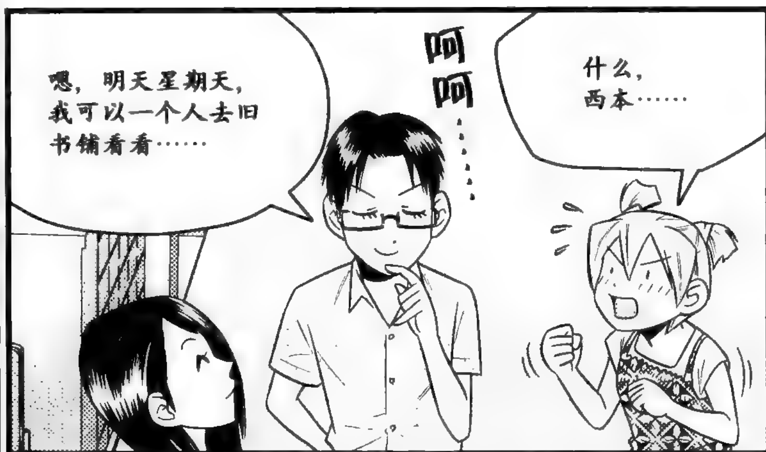
如果把截面积看成是极其微小的面积的集合，运用该面积的极限就能够表示应力。



面积越小，在微分要素中的应力变化就越小。因此，如果是**面积接近无穷小的微分要素（微元）**，就可以看做应力没有因为位置的不同而发生变化，此时可以表示为“力 = 应力 × 面积”、“应力 = 力 / 面积”。

这一思考方法在以后的计算中也很重要（第 5 章 P149 等）。要牢牢地记住它们的含义哦。


后天是星期一，
又要去学校啦！


嗯，明天星期天，
我可以一个人去旧
书铺看看……
呵呵……
什么，
西本……

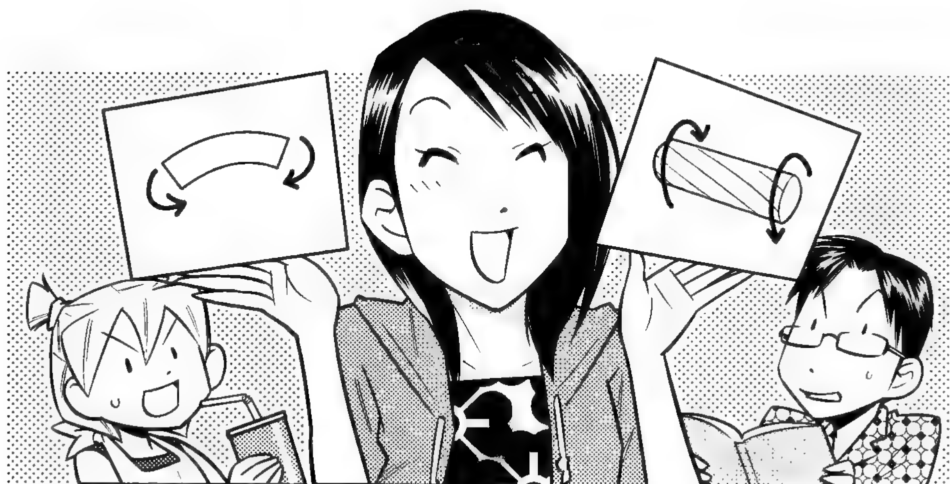

NONO为了构思设
计书架也想去看看
很多书架！
明天我和你一
起去吧!?
什么!??


啊，
好像很有趣哦！
那么我也想去，
因为我也要买一
些专业书。
GO
那好吧！


为什么会这
样啊……

第3章

应变和变形



今天很有意思哟。廉价买到了你想要的专业书。

NONO也看了很多书架，现在我满是灵感!!

呼哧 呼哧

那个……我来稍微拿点吧？





嗯……那么，

让我们稍微休息一下吧！正好有个公园！



1　如何表示变形程度

何谓应变？（应变）



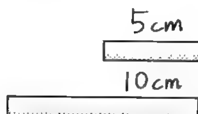
嗯，提起棒子，我就想到了圆杆的变形！

今天我要讲的是有关变形程度的知识。

※ 日语直译：腿都成棒子了。——译者注



没错！那么就请你们想象一下，

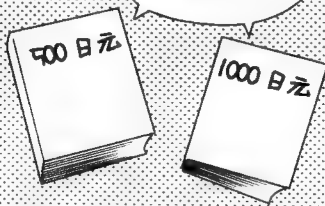


如果长 5cm 的橡皮擦缩短 1cm 和长 10cm 的橡皮擦缩短 1cm，你们认为哪个橡皮擦的变形程度大？

那么简单啊，一定是 5cm 的橡皮擦。

500 日元的书如果减价 100 日元，那么就是减价了 20%，但是 1000 日元的书如果减价 100 日元，那么只减价了 10%……它们的道理是一样的！

减价 100 日元



哈哈，没错！

也就是说要表示变形程度，不仅需要变形量，变形前的原始大小也很重要。

请看这个公式！

$$应变 = \frac{变形量}{原始长度}$$

在材料力学上使用“应变”这一物理量来表示变形程度。

嗯，也就是说表示变形比例的物理量是应变吧，

这很简单嘛！

例如，若 5cm 的橡皮擦缩短 1cm，结果就会这样。

$$应变 = \frac{-1cm（变形量）}{5cm（原始长度）} = -0.2$$

单位互相抵消变成无量纲量。

这样，应变是没有单位的。

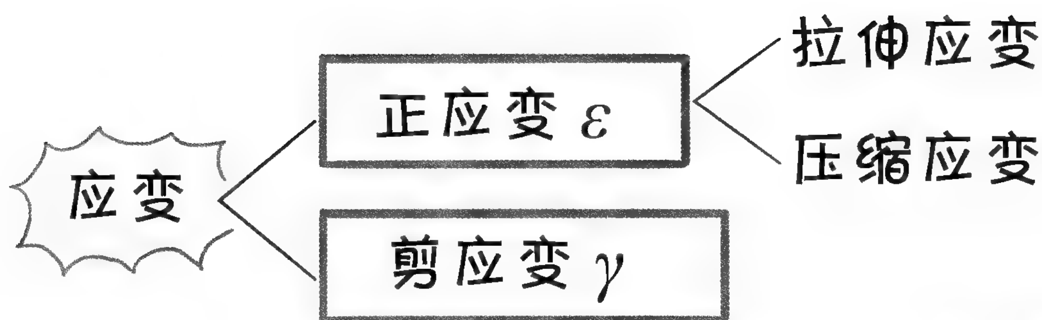
在物理学上将没有单位的量叫做无量纲量。

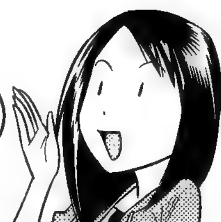
压缩

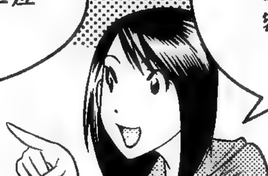


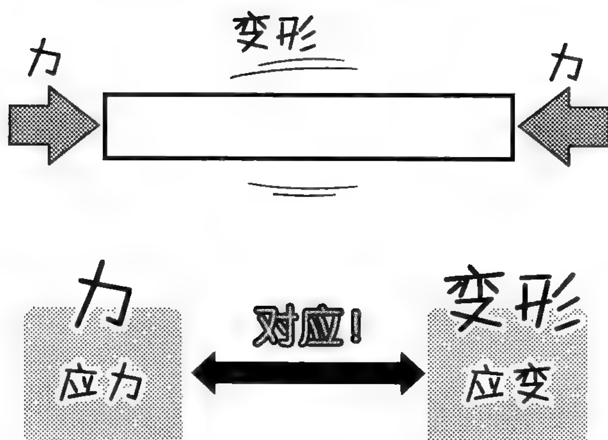
应变也有负号

哦，
因为受到压缩力而缩短了，所以应变也会加上负号啊！


应变
正应变 ε
剪应变 γ
拉伸应变
压缩应变


并且可以将应变这样分类。
用ε来表示正应变，用γ来表示剪应变。



嗯??
好像最近见过与此类似的东西……
没错！与昨天学过的应力的分类（参照 P70）几乎一样，那个是正应力、剪应力……
你反应很快哦。其实应力和应变关系密切！


你们都知道当对物体施加力时物体会产生变形吧？应力是力，应变是变形……
也就是说“与应力相对应，物体会产生应变”。
变形
力
力
力
应力
对应！
变形
应变




确实如果有应力就会产生应变，
如果发生应变就应该有应力。它们是不可分割的关系吧。
啊！原来如此！因此应力与应变的分类互相对应，看起来很相似。


应力
应变
应力和应变是材料力学基础的两大重点。
你们要明白越过这两座山后才是重要的！


似乎在越过这两座山之前会遇险……
是吧……
不要那么泄气啦！
让我来依次讲解一下应变的分类。

拉伸和压缩时的长度和直径（正应变）

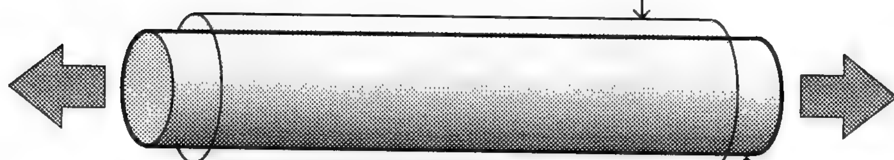
首先是“正应变”，

正应变是由拉伸和压缩所产生的应变。

正应变 ε

接着试着想一想拉伸杆件时的状况，在杆件变形前和变形后会发生什么变化？

变形前的圆杆

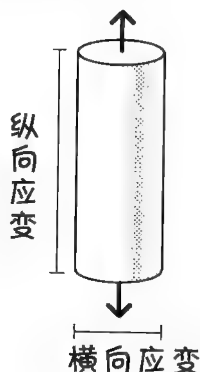


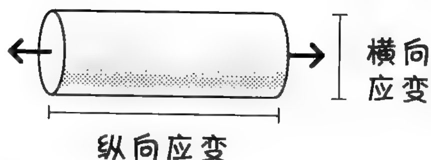
拉伸变形后的圆杆

嗯……因为受到拉伸力的影响，长度增加、直径变小了。

没错！注意杆件的长度和直径很重要哦。

我们将表示杆件长度变化的正应变叫做纵向应变。
将表示杆件直径变化的正应变叫做横向应变。

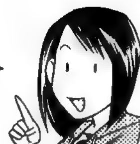


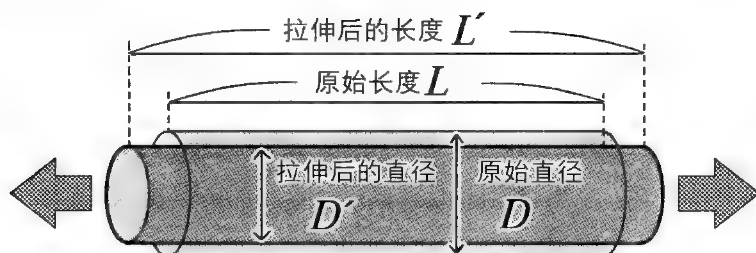


啊，纵向应变的“纵向”是指受力杆件的轴方向吧！

这与杆件的放置方式无关，要注意杆件的轴方向，这点很重要。

那么让我们用公式来表示纵向应变和横向应变吧！
因为变形量实际上是一个微小量，所以大多数时候用 Δ 来表示它。





$$纵向应变\ \varepsilon = \frac{\Delta L(变形量)}{L(原始长度)} = \frac{L'-L}{L}$$

$$横向应变\ \varepsilon' = \frac{\Delta D(变形量)}{D(原始直径)} = \frac{D'-D}{D}$$

这样我就明白了！

长度和直径都发生了变化。



这里要注意的是拉伸变形时的应变——拉伸应变与压缩变形时的应变——压缩应变的不同。

根据是拉伸还是压缩来决定是正值还是负值。



拉伸变形的场合	压缩变形的场合
纵向应变 ε（正值） 横向应变 ε'（负值）	纵向应变 ε（负值） 横向应变 ε'（正值）

※ 通常都是“取拉伸为正、压缩为负”，这是很自然的事情 但是，也有少数情况下在处理压缩问题时会“取压缩为正”。为了使问题容易让人理解、减少错误，需要视情况临机应变

原来如此。例如，如果“纵向应变 ε 为负”，那么就可以得知杆件的状态是压缩。

正负很重要！

那么，接着请看这个！

$$泊松比\ \nu = -\frac{\varepsilon'（横向应变）}{\varepsilon（纵向应变）}$$

※ 为了使泊松比（Poisson's ratio）为正值，要在公式前加上负号

现在学的就是横向应变与纵向应变之比。

比

泊松比是表示物体变形特征的常数，大多用符号 ν 来表示它。它也是一个没有单位的无量纲量。

嗯……
常数是固定的数吧。

各种材料的泊松比 ν

- 基本上是 ν<0.5
- 许多金属是 0.3 左右
- 橡胶大于 0.4
- 软木接近 0

对！它与材料的大小和形状无关，取的是材料固有值。

每一种材料都有其固有的泊松比，这一点很有趣哦！



表示形状的扭曲（剪应变）

接着是“剪应变”（又名切应变、剪切应变），表示剪应变的符号是γ。

剪应变 γ

嗯，既然带有剪（剪切）字，那它和剪力（剪切载荷）有关吧？

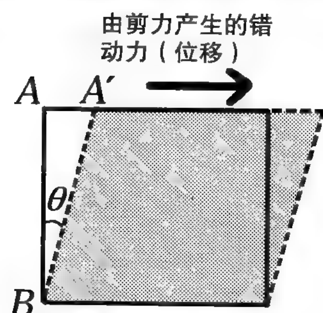
剪力

变形前

变形后

没错！因为受到剪力作用，长方形就这样变形为平行四边形。

并且可以用如下公式来表示剪应变。

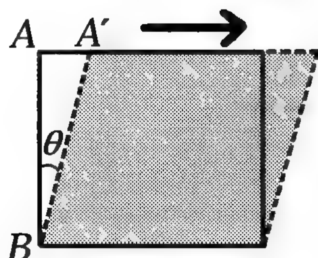


$$\text{剪应变 } \gamma = \frac{AA'\ (\text{位移量})}{AB\ (\text{长度})}$$

原来如此！只要用位移量除以长度就可以了。

它是指AB单位长度的位移量吧？

你们好像都明白了哦。不过其实还可以用更简单的方法来表示它。



在左图中……

剪应变 γ = 角度 θ

※ 这里以变形小、θ 为微小量为前提条件。

请看！！

哦！
很简单！

简洁明了！

看一下图就能够明白，这是通过角度变化来表示应变。

这个角度是用弧度（radian）法来表示的。

弧度法？
radian？

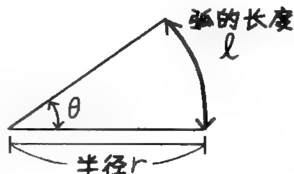
所谓弧度法是指用圆周率 π 来表示角度的方法，如 $90° = \pi/2$。

利用弧度法后，各种计算都会变得更方便。

弧度 (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
角度 (°)	30	45	60	90	180	360

角度和弧度的对应

在求弧的长度时，



- 如果使用角度 θ（°），其公式为

$$\ell = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

- 如果使用角度 θ [rad]，其公式为

$$\ell = r\theta$$ 非常轻松！！







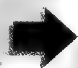
NONO得到漂亮的家具后就想早点用它来装饰房间吧？西本买书后就想快点读吧？

既然一起学了公式就应该用它来解决问题！

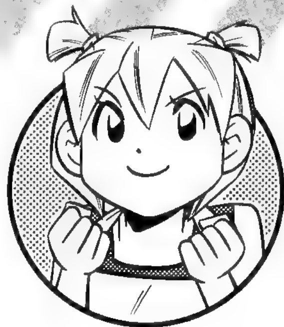
……尾濑会长就是“微笑的斯巴达”……

我同意你的说法……

2 由应变知变形



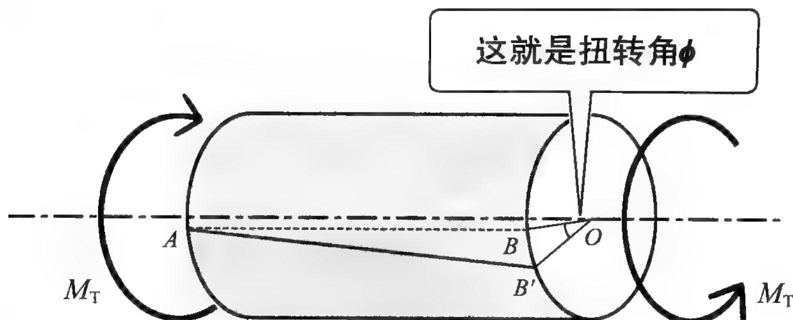
扭转变形和剪应变的关系



今天我们学习了各种应变公式。接着我们将利用这些公式来探讨一下**“在扭转变形中的应变”**问题。好像在尾濑会长的词典里就没有休息这两个字。

扭转变形就好像是在拧抹布一样（参照 P42）。虽然看起来似乎有点难，不过还是让我们一起来一点一点地慢慢学习它吧！

在此我们将会思考一下**“在扭转变形中的剪应变”**问题。首先让我们来看看在扭转变形中所产生的**“扭转角”**。

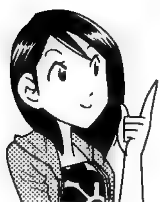


假设扭矩 M_T 作用于圆杆，圆杆发生扭转变形（M_T 是表示扭矩 twisting moment 的符号）。

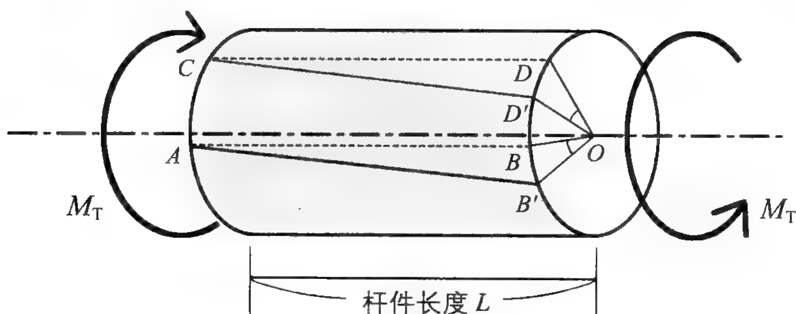
如上图所示，变形前的直线部分 AB 因为扭转变形，变为 AB' 。以圆杆中心 O 为起点的半径线也从 OB 移动到 OB' 。我们将此时的角度 $\angle BOB'$ 叫做**“扭转角”**，在本书中将用符号 ϕ (phi) 来表示它。并且会用弧度来表示这个旋转角。

原来如此。刚才我们已经学过弧度了。关于这个扭转角我也明白了！很简单。



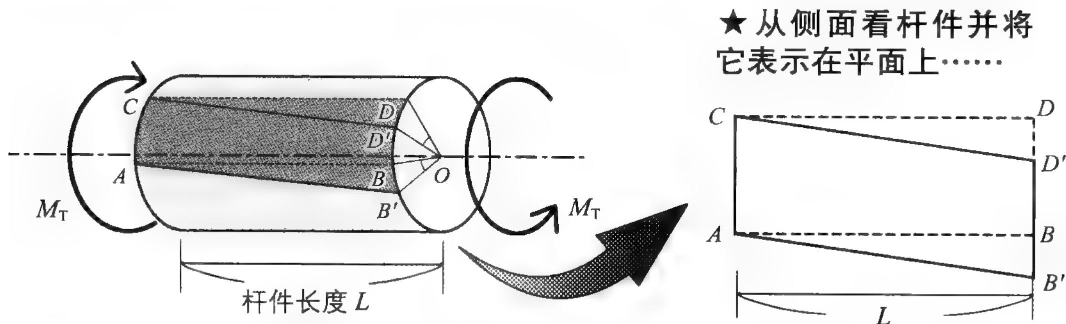


接着会有点复杂，你们要注意哦！在刚才的图中，我们考虑的是只有一条直线 AB 的情况，接着我们将考虑一下有**两条直线 AB、CD** 时的情况。



假设长度为 L 的圆杆发生了扭转变形。变形前的直线部分 AB 和 CD 因为扭转变形分别变为 AB' 和 CD'。角度∠ BOB' 和角度∠ DOD' 为扭转角 ϕ。

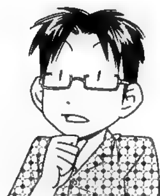
并且如果从侧面看这个杆件并将它表示在平面上，就是如下图所示这样。



长方形发生位移变成平行四边形，这种情形好像在某处见过吧？没错！它就是**由剪力所引起的变形**。

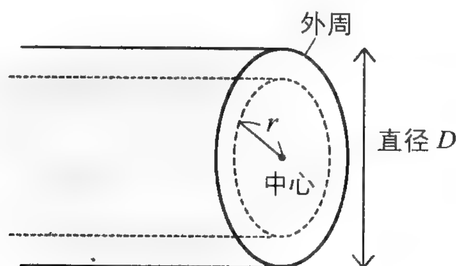
接着我们将用这个**剪切变形**图求一下剪应变 γ (Gamma)。

啊！今天我们看到过这个剪切变形图(参照 P101)。也就是说，要考虑圆杆的 **“扭转变形”**，只要**注意在这个圆柱表面所产生的“剪应变”**就可以了！这可是不容忽视的关键点哦。



另外，我认为如果理解了以上步骤，之后的内容就很容易理解了。接着让我们来探讨一下以中心为起点、半径为 r（即到中心的距离为 r，$r<$ 直径 $D/2$）的圆筒的表面。

当这个半径 r 变化时，剪应变 γ 会如何变化呢？





距离 r 的值越小，离中心越近；距离 r 的值越大，离外周越近。如果能够写出这个距离 r 与剪应变 γ 的关系式，就能够得知剪应变 γ 会因为 r 的不同而发生什么变化。

那么让我们按照刚才的步骤来探讨一下这个问题。

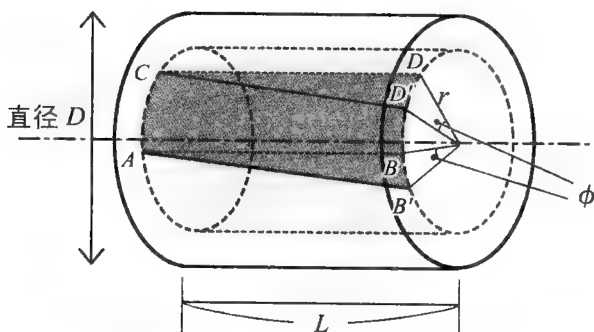


图1 受到扭转的圆杆产生的扭转变形

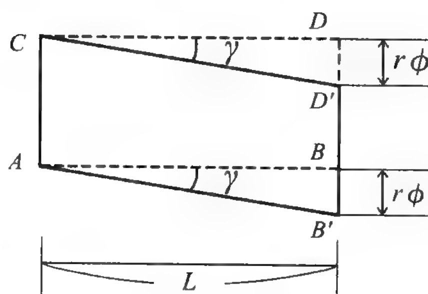


图2 杆件侧面的平面图

请看图 1。变形前的直线部分 AB 因为扭转变形变为 AB'。此时如果用 ϕ 表示扭转角，那么根据 **"圆弧 = 半径 × 角度 [rad]"** 可以得出圆弧 BB' 的长度为 $r\phi$（请参照圆弧公式 P102）。

接着请看图 2。根据剪应变的公式（参照 P101），此时的剪应变可以用如下公式来表示。

$$\gamma = \frac{r\phi}{L} = r\omega$$

在这个公式中的 ω(omega) 表示**杆件单位长度的扭转角**，是一个被称为**扭转率**的物理量。如果用公式来表示就是 $\omega = \phi / L$。

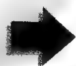
在扭转问题中如果是用这个扭转率（单位长度扭转角），公式就会变得简单，更容易看明白。因为在以后章节的问题中也会用到它，所以请你们要牢牢地记住（参照 P147）。

扭转率 ω 是指杆件单位长度的位移量。并且可以用它来表示以杆件中心为起点的距离 r 与剪应变 γ 的关系式。



利用这个公式可以计算出到圆杆中心任意距离 r 处所产生的剪应变。试着计算一下就能够得知：**剪应变 γ 在圆杆中心处为零；随着离轴的距离变远，剪应变 γ 会按比例增大；在圆杆表面，剪应变 γ 达到最大值 $D\omega/2$**。

这就是**在扭转变形中剪应变的特征**。

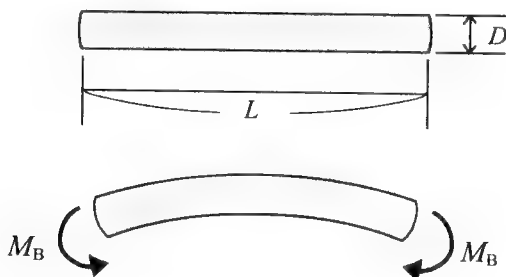


弯曲变形和正应变的关系

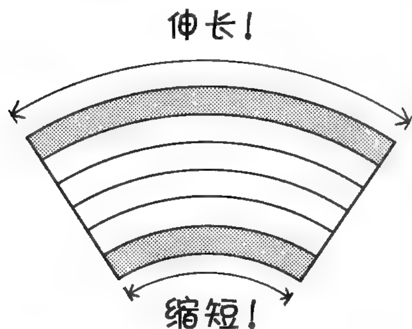


嗯。这次让我们利用**应变公式**来探讨一下**"在弯曲变形中的应变"**问题。弯曲变形就是指物体会像香蕉一样凹凸有致地弯曲着。看起来好像很难，怎么办呢……

在此让我们来思考一下在弯曲变形中所产生的正应变问题。假设弯矩 M_B 作用于直径为 D、长度为 L 的圆杆，圆杆发生弯曲变形 (M_B 是表示弯矩 bending moment 的符号)。

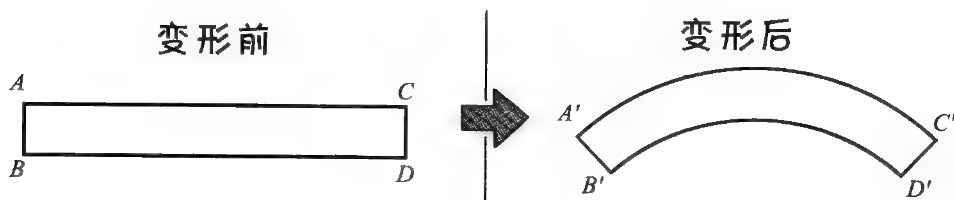


由于弯曲，圆杆会变成圆弧状。在此图中，圆杆上面呈凸出状弯曲着。首先请大家从此图中了解这一点，圆杆的上部分会伸长、下部分会缩短。





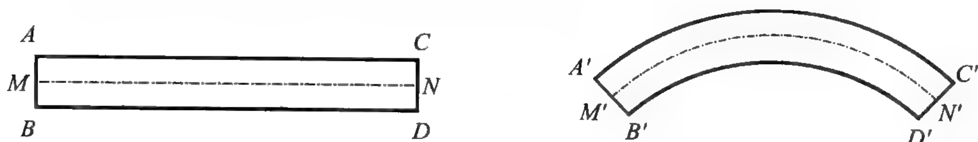
接着让我们将从侧面看到的圆杆图展现在平面上并用 *ABDC* 来表示它。



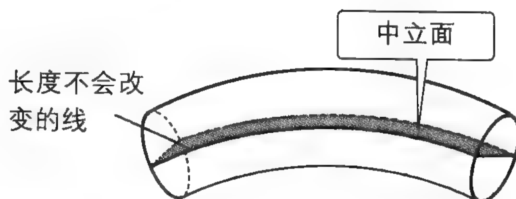
由于弯曲变形，*ABDC* 变为 *A′B′D′C′*。直线 *AC* 部分伸长变为圆弧 *A′C′*，直线 *BD* 部分缩短变为圆弧 *B′D′*。

观察一下图就能够明白，假定 *A′B′*、*C′D′* 垂直于轴线保持直线状。

如果沿着直线 *AB* 来考虑变形状态，因为在 *A* 点会伸长，在 *B* 点会缩短，所以正好可以想象到在 *A* 点和 *B* 点之间会有一个**既不会发生伸长也不会发生缩短的点**。同样在直线 *CD* 上和在中间段的截面上也可以采用此种思考方法。因此，如果把从 *AB* 到 *CD* 的全部截面上所有不会发生伸长也不会发生缩短的点连接起来就会形成直线 *MN*，变形后直线 *MN* 就会变为圆弧 *M′N′*。



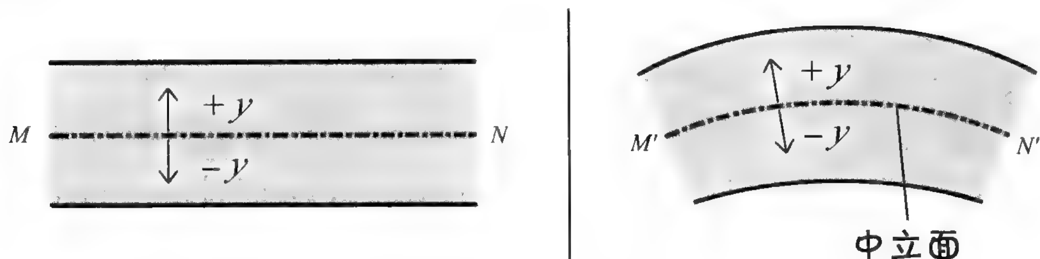
直线 *M′N* 和圆弧 *M′N′* 的长度不会改变。我们将**"长度不会改变的线"**组成的面叫做**中立面（或中性面）**。可以说圆弧 *M′N′* 也是中立面的一部分。





认识并活用这个中立面很重要！今后也会频繁地出现中立面，所以要牢牢地记住它的含义。

那么接着用**距离** y 来表示从直线 MN 或圆弧 $M'N'$ 到圆棒任意位置的距离。如果距离 y 发生变化，正应变 ε 会如何变化呢？假设从直线 MN 到其上面部分任意位置的距离 y 为正值（$y>0$），到其下面部分任意位置的距离 y 为负值（$y<0$）。





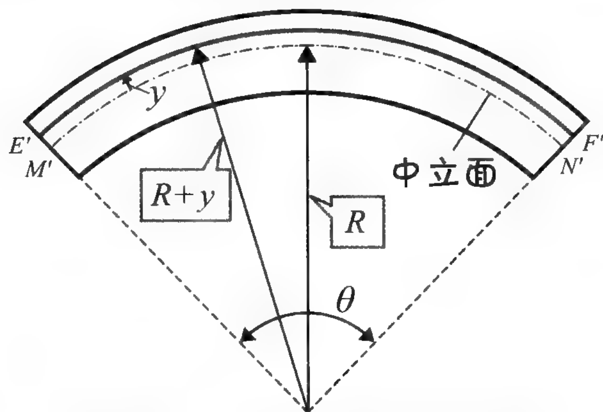
这个距离 y 叫做“到圆杆**中立面**的距离”。
y 值越小，距离中立面越近，y 值越大，距离圆杆上面部分的表面或下面部分的表面越近。如果写出**该距离 y 与正应变 ε 的关系式**，就能够明白正应变 ε 会如何随着 y 的变化而发生变化。

另外假设圆弧 $M'N'$ 的**曲率半径**为 R。

如果在某条曲线上的某个点可以找到一个相对的圆，与它有相等的曲率，那么曲线上这个点的曲率半径就是该圆形的半径。曲率半径主要是用来描述曲线的弯曲程度。

“假设圆弧 $M'N'$ 的曲率半径为 R” 具有什么意义呢？

请看下图。可以用 **“圆弧 = 半径 × 角度 [rad]”** 来表示圆弧。



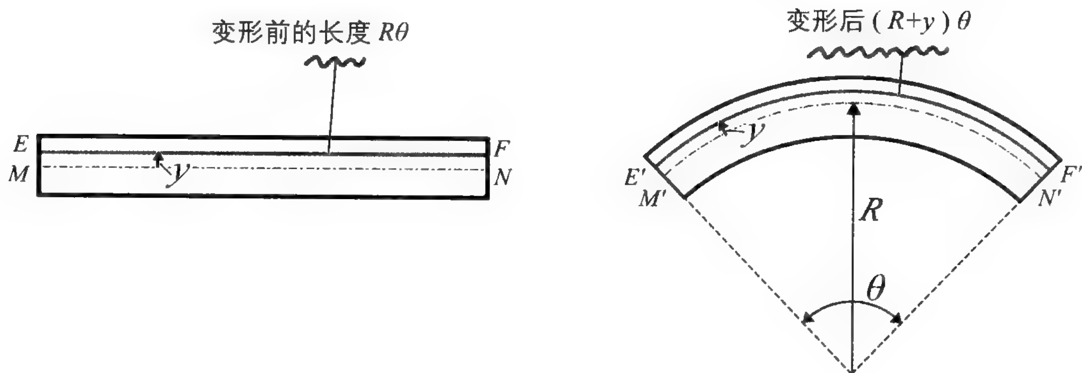
也就是说，**圆弧 $M'N'$ 的长度为** $R\theta$。**y 位置的圆弧长度（圆弧 $E'F'$）为**（$R+y$）θ。

并且请看下图。虽然直线 MN 变成了圆弧 $M'N'$，但是**因为它在中立面，所以其长度本身没有发生变化**。也就是说 $MN=M'N'$。

因此 MN（变形前的长度）$=M'N'=R\theta$ 成立。

并且变形前的长度相等，所以 $EF=MN$ 通常也成立。

也就是说，可以认为在 y 位置处**变形前的长度 $R\theta$ 变形后伸缩为（$R+y$）θ**。



因此根据正应变（参照 P99）的公式，可以将此时的纵向应变用如下公式表示出来。

$$\text{纵向应变}\ \varepsilon=\frac{(R+y)\theta-R\theta}{R\theta}=\frac{y}{R}$$

变形量是指变形后与变形前的长度差。这个式子也是距离 y 与正应变 ε 的关系式。
另外，让我们用更方便的方式来表示这个公式。



如果用 $k=1/R$，就可以将这个公式写成

$$\varepsilon = \frac{y}{R} = \kappa y$$

这里的 k **是** R **的倒数**，我们将它叫做**曲率**。如果使用曲率半径 R 或曲率 k，就能够表示出曲线的弯曲程度。在弯曲问题中，如果用**曲率** k 来表示弯曲变形，公式就会变得简单，更容易看明白。因为在以后章节的问题中也会用到它，所以请你们要牢牢地记住（参照 P147）。

那么，让我们利用这个公式来计算一下到圆杆中立面的距离 y 与截面正应变之间的关系。

试着计算一下就能够得知：**在中立面上正应变为零；随着离中立面的距离变远，正应变会按比例增大；在圆杆的上部分表面正应变达到最大值，为** $Dk/2$，**在圆杆的下部分表面正应变达到最小值，为** $-Dk/2$。

也就是说，在上部分表面会产生**拉伸状态**的正应变 $Dk/2$，在下部分表面会产生**压缩状态**的正应变 $Dk/2$。

这就是**在弯曲变形中所产生的正应变的特征**。



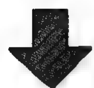
如果进一步地学习的话，还能够表示其他各种关系。为了以后，一定要牢牢地记住今天所学到的东西。

在第 3 章，我们处理了在杆件扭转变形中的**剪应变**问题、在杆件弯曲变形中的**正应变**问题。

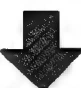
如果要进一步学习，还有在杆件扭转变形中**扭矩和剪应力的关系**和**单位长度扭转角（扭转率）**，也能够将杆件弯曲变形中**弯矩和正应力的关系**以及**曲率**表示出来。

我们将会在第 5 章处理这些问题。

扭转变形	弯曲变形
• 剪应变 $\gamma = r\omega$ $\left(= \dfrac{r\phi}{L}\right)$	• 正应变 $\varepsilon = \kappa y$ $\left(= \dfrac{y}{R}\right)$



在第 5 章……





• 扭矩和剪应力的关系 • 扭转率	• 弯矩和正应力的关系 • 曲率


哇……
今天既买了东西，竟然还努力学习了。


辛苦了！
……啊？
西本，你要去哪儿？
吓一跳


我还要顺便去一个地方……
再见！


哼……




悄悄地

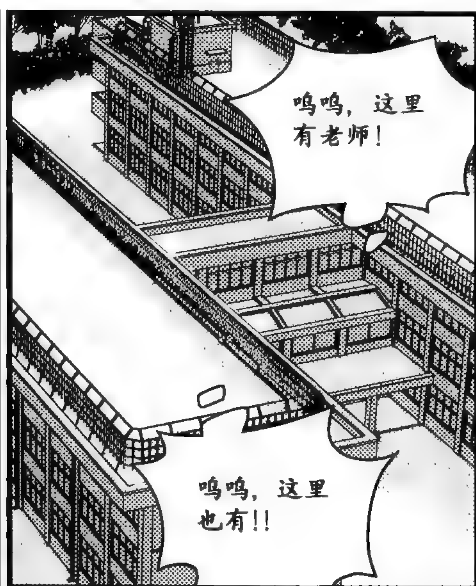

……还要悄悄地潜回学校把这些书放在活动室里。


如果我就这样把它们全背回去，肯定又会惹妈妈生气。
又买这么多书，放的地方都没有了！！

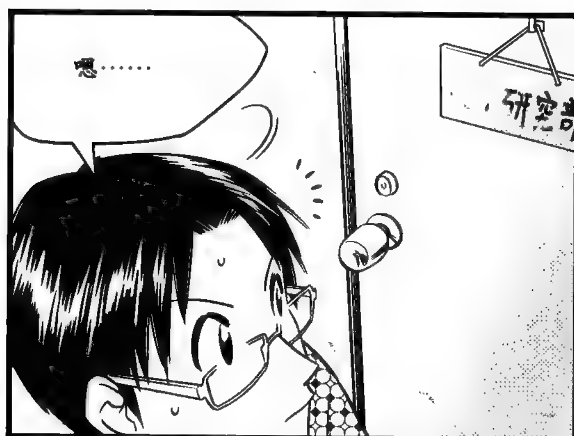

呜呜……为了我心爱的书。
我必须完成这个任务……


迅速地


喔，保安!!
不行不行，我穿着便服，会把我当成可疑者！还是绕道而行吧。


呜呜，这里有老师！
呜呜，这里也有!!



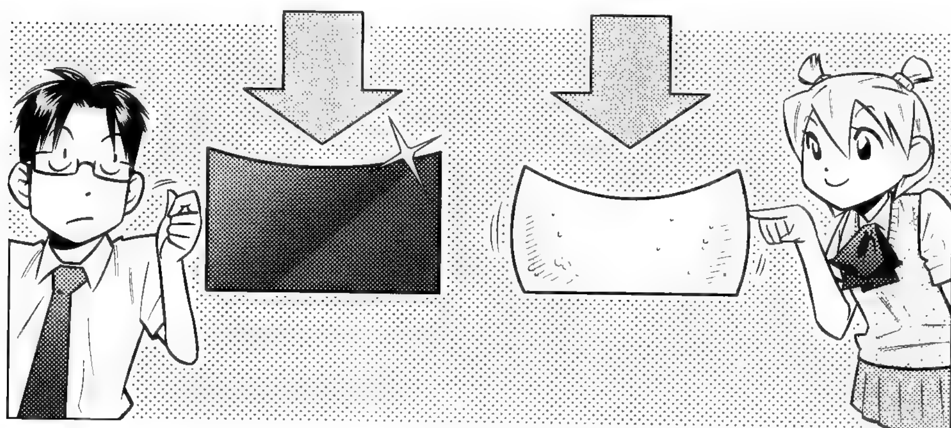




没人使用的活动室……

第4章

材料的强度与力学性能

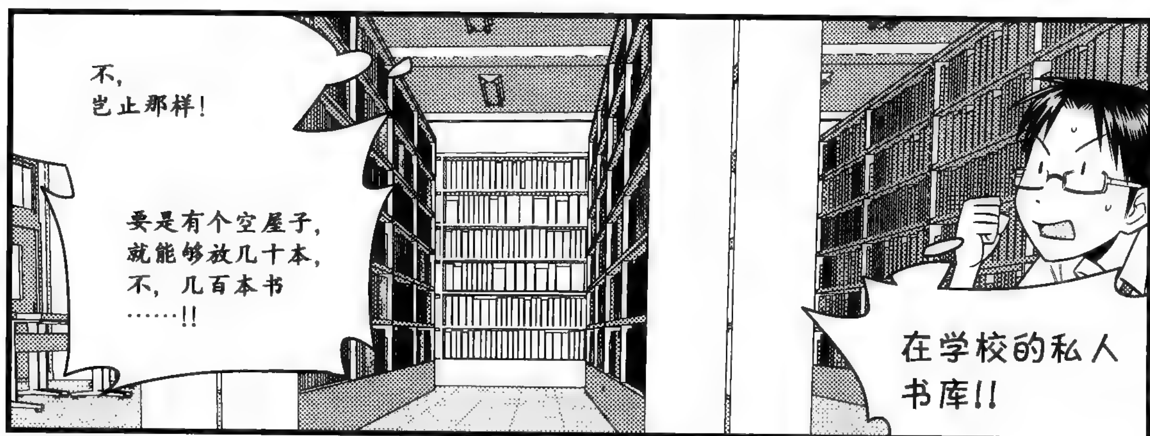


1 力和变形成正比



为了制作出不易损坏的东西(材料的力学性能)








另外，
今天要学习关于材料的力学性能的内容。
嗯？？
那是什么啊？


在我们的周围有各种各样的材料吧？
价格高？
价格低？
轻？重？
容易裂开？
很难裂开？
嗯，铁、塑料、木材……
没错！
这些材料都具有各种特性，在材料力学上尤其重要的就是材料的力学性能。


材料的力学性能
强度大 ⟷ 强度小
难以变形 ⟷ 易变形
柔韧 ⟷ 脆弱


是吧？
并且之前讲过的应力和应变非常重要。
应力
应变
其实
应力与应变的关系正是在表示材料的力学性能！

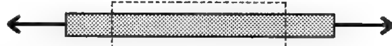

啊，
这些确实都是“制作不易损坏的东西”时所具有的最重要的特性。

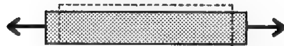
应力与应变成正比（胡克定律）

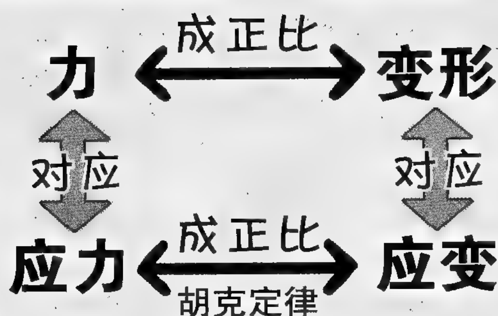
胡克定律
力＝劲度系数 × 伸长长度（压缩长度）

※ 关于胡克定律的详细内容请参考 P52。









也就是说应力和应变也成正比，我们将它们的这种关系叫做胡克定律。

如果考虑一下正应力与正应变、剪应力与剪应变的关系，以下的公式就会成立。

应力与应变的关系（胡克定律）	剪应力与剪应变的关系（胡克定律）
$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$
正应力 = 杨氏模量 × 正应变	剪应力 = 剪切弹性模量 × 剪应变

哦，这是应力与应变的比例关系式！

喂，但是这里出现了我从未听说过的词语。

杨氏模量和剪切弹性模量，感觉好像很难……

呵呵，那么我就依次来解释一下这个公式和用语吧！

正应力和正应变的关系(杨氏模量)

$$\sigma = E\varepsilon$$

正应力 = 杨氏模量 × 正应变

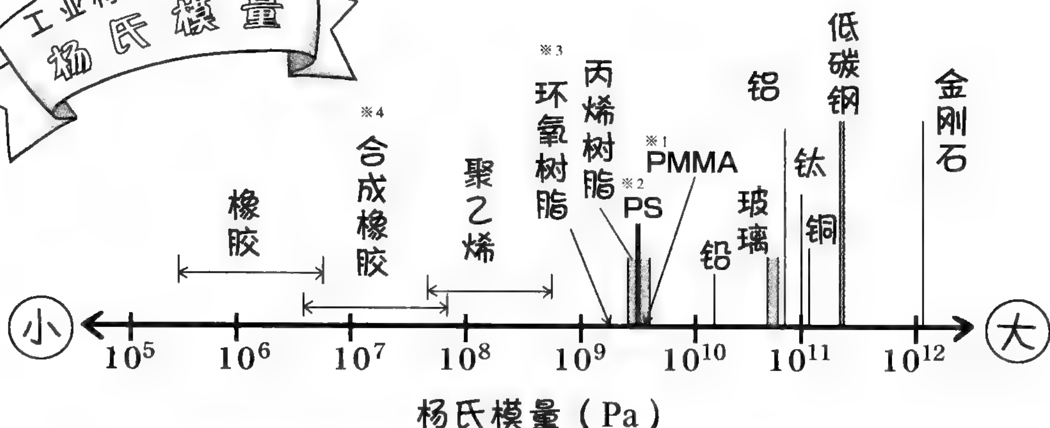
首先是这个，E 被称为杨氏模量或纵向弹性模量，它是表示材料固有性质的常数，

它的大小标志了材料的刚度(难以变形的程度)。

那么就是说杨氏模量越大越不容易变形吗？

杨氏模量大　杨氏模量小

没错！下面是工业材料的杨氏模量对比。

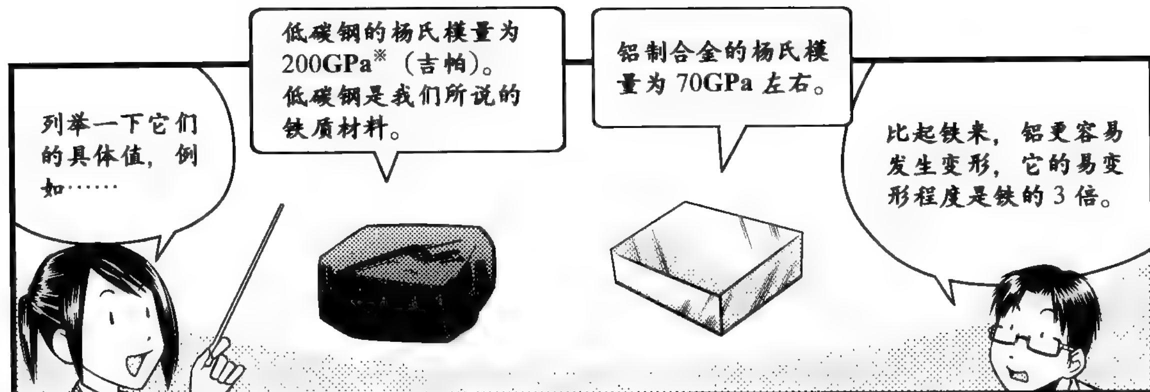


※1 PMMA 是丙烯树脂的一种。有时也被用于制作硬式隐形眼镜。
※2 PS 是指聚苯乙烯，一般被用于制作 CD 盒等
※3 环氧树脂是一种经常被用作黏结材料的合成树脂。
※4 合成橡胶是弹性变形较大的高分子材料

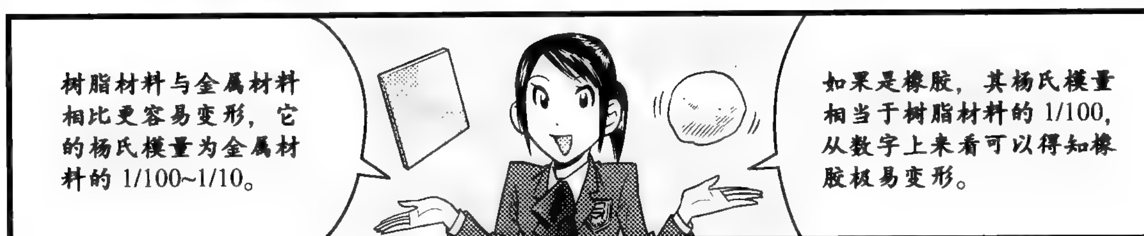
噢，我知道哟，金刚石很难变形，橡胶很容易变形。

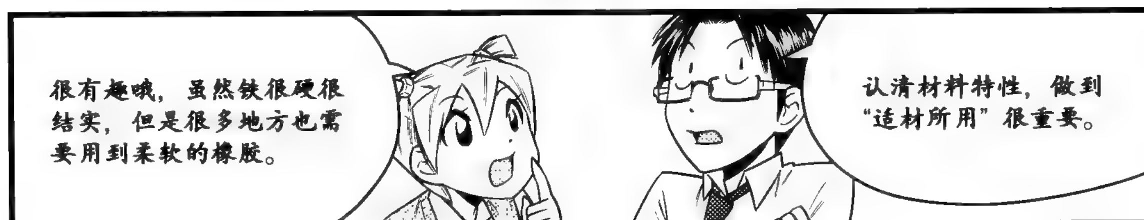
我是橡胶吗？

比较一下它们的杨氏模量，就一目了然了哦！



※ 关于杨氏模量的单位，将会在P128介绍。





下面让我们借助图表来思考一下吧！如果把应力与应变的关系用图表表示出来的话，就是这样。

哦，确实是正比关系。

应力 σ

这个斜率为杨氏模量

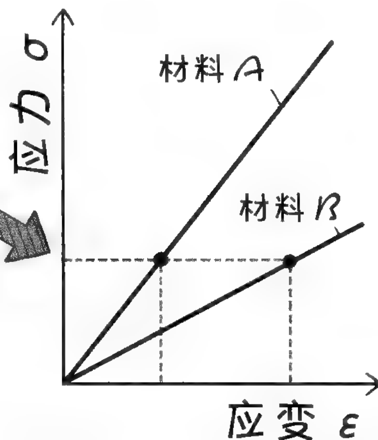
应变 ε

↑应力与应变成正比！

嗯，你说"斜率是杨氏模量"，这是怎么回事？

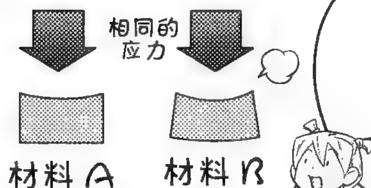
比如……研究一下材料A和材料B的性质，将研究结果用图表表示出来。

注意！
这个应力所对应的应变值是多少呢？



※ 关于材料特性的测定方法，将会在P127中进行说明。

即使给予它们相同的应力，材料A的应变也会比材料B小，也就是说材料A比材料B难变形，你们明白了吗？



啊，
确实斜率（杨氏模量）越大，越不容易变形！

嗯，我已经明白了刚开始的疑问。

应力和应变的关系正是表示了材料的力学性能。

没错！
如果理解它的意思，就很简单了吧。

剪应力和剪应变的关系（剪切弹性模量）

$$\tau = G\gamma$$

剪应力 ＝ 剪切弹性模量 × 剪应变

那么接下来是 G，G 被称为剪切弹性模量或横向弹性模量。它也是表示材料固有特性的常数，

要牢牢地记住哦！

噗

怎、怎么了!?

刚学了个杨氏模量（纵向弹性模量）E，现在又出来个剪切弹性模量（横向弹性模量）G，并且昨天学过泊松比 ν（请参考 P100）。

它们全部都是表示材料固有特性、具有固定值的常数！

NONO 已经不行了……

嗯，确实有些复杂。

那么让我们来整理一下它们三个之间的关系吧！

啊，我也理解你的心情啦！

我开始觉得有点混乱了，好复杂！

其实杨氏模量 E、剪切弹性模量 G 和泊松比 ν 有如下关系。

$$\underset{\text{杨氏模量}}{\underline{E}} = 2\underset{\text{剪切弹性模量}}{\underline{G}}(1+\underset{\text{泊松比}}{\underline{\nu}})$$

噢，
用一个公式就能将它们的关系表示出来啊！

也就是说“在它们三个之中，只要知道两个材料常数就能够通过计算求出剩下的一个材料常数”。

啊，原来如此！这好像很方便。

表示材料刚度（难变形程度）最常用的常数就是杨氏模量。

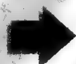
但是其他两个也是重要的常数，你们要牢牢地记住它们哦！





没办法！
NONO 一定会加油记住你们的，E 先生、G 先生、ν 先生！

好像又变精神了……

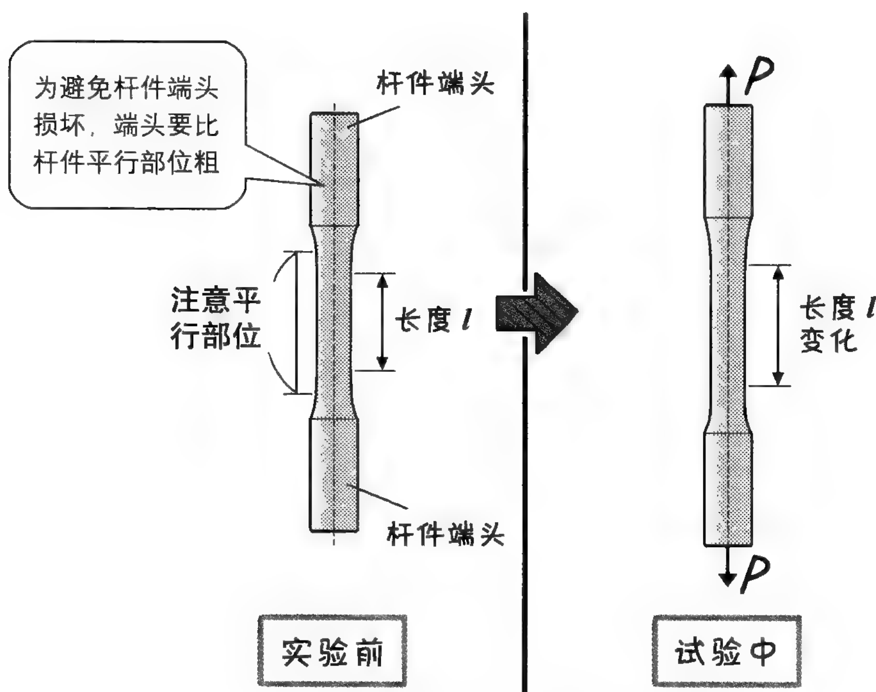


材料特性的测定方法



今天我们学习了杨氏模量，它是表示材料固有特性的常数。那么如何能够得出它的值呢？我很想知道。

一般通过**杆件拉伸试验**方法能够测出材料特性。这就需要用“拉伸试验机”来拉伸金属等材料。

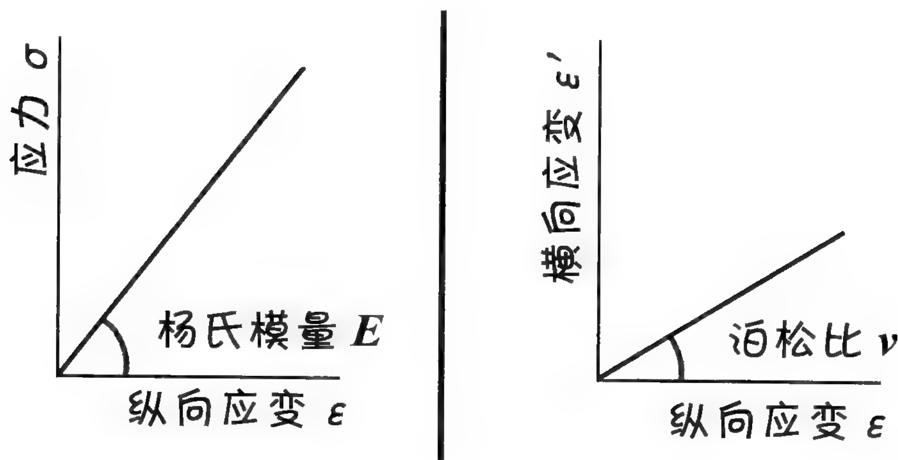


用装置拉伸这种形状的试片杆件

此时，在测量拉伸力的同时也测量用杆件平行部位的伸长长度除以平行部位长度得到的**正应变（纵向应变）**ε 和杆件直径方向的正应变（**横向应变**）ε' 。

用拉伸力除以平行部位的横截面积就能够求出应力。

如果把应力、横向应变与测定的纵向应变的关系用图的形式表示出来的话，就是如下所示的图。



从此图的斜率可以得知杨氏模量和泊松比。可见通过一次实验，就能够得出杨氏模量和泊松比。

另外，让我来讲解一下有关**杨氏模量单位**的问题。杨氏模量的单位是 Pa（帕斯卡），在实际应用中多使用 GPa（吉帕）。在柔软材料的场合，也会用到 MPa（兆帕）。

G（吉加，简称“吉”）$=10^9$=1000 000 000。

关于 G（吉）等词头，请参考 P126 的附录内容。

铁的杨氏模量为 200GPa，表示要使铁产生 100% 的应变（使其长度增加到原来的 2 倍）需要在它的每 $1m^2$ 施加 2000 亿 N（约 2000 万吨）的力。

实际上材料一般在 1% 以下的应变状态下，大的时候在百分之几的状态下就会屈服，当应力处于不再增加的状态时，材料结构最终被破坏掉。因此并不是在长度达到 2 倍之前，力与伸缩程度都成正比。

并且我们也不会考虑截面为 $1m^2$ 的铁杆问题，说到底这只是数学上的表现方式而已。

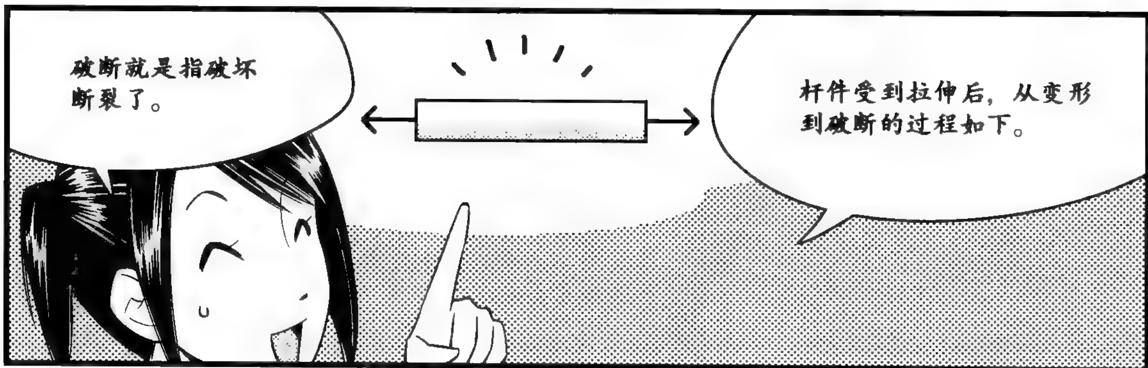
2　材料的支撑力有极限

有极限（破断）





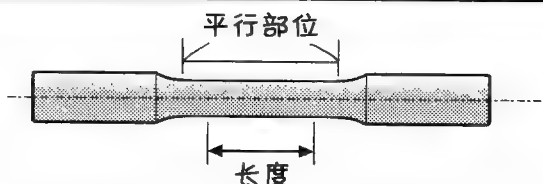
※ 即取消约定。日语中"破断"与"破谈"两词的读音相同。——译者注



杆件的变形状态过程图

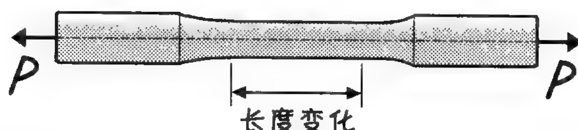
试验前

与下页图中的 A 点对应



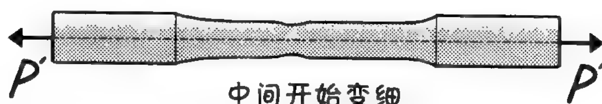
试验中

从 A 点到 C 点



试验中

从 C 点到 D 点



破断后

与 D 点对应



变细后在最细部分发生破断

哎！
变细后最终还是断裂了！

同样都是在变形，只是到达某一程度后，就会发生中间变细的状况。

如果材料中间变细，应力就不会增加了。并且如果进一步地拉伸材料，材料就会破断※。

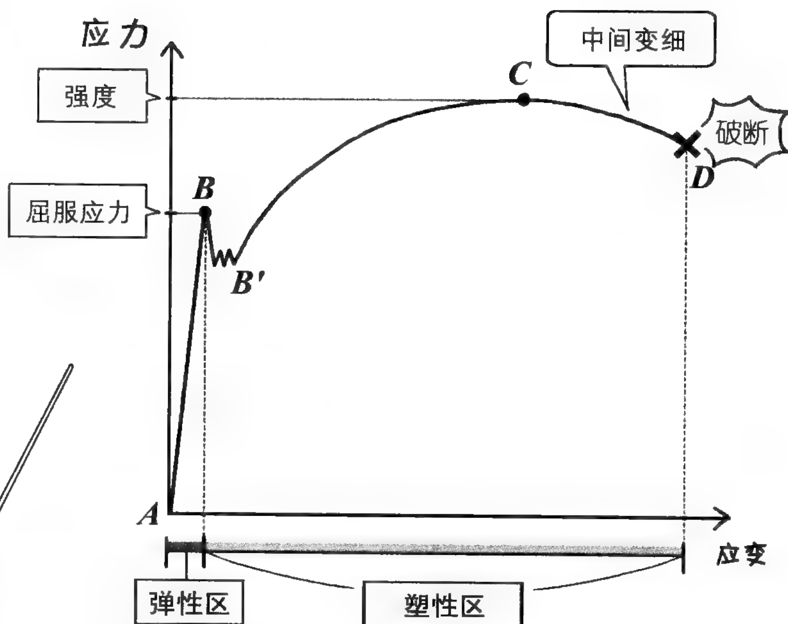
腰部变细很重要，但是材料中间变细就不太好了啊……

※ 如果出现中间变细的状况，截面就会变小，材料局部应力和应变就会增大。不过作用于整个杆件的力并不会增加。随着材料中间部位越来越细，变细部位的应力就会越来越大。但是在截面变小的部位能够支撑杆件的力会减少，这样杆件最终会破断

是否能恢复原状？（弹性区和塑性区）

另外，被拉伸的杆件变形后会破断……

如果将杆件从变形到破断的过程用应力与应变的关系图表示出来的话，就是如下所示的这样。



＜通过拉伸试验得出的低碳钢的应力与应变的关系＞

※ 当材料为非铁金属时，不会产生非常明确的屈服现象

这是什么啊!??
有好几个不太明白的词语……

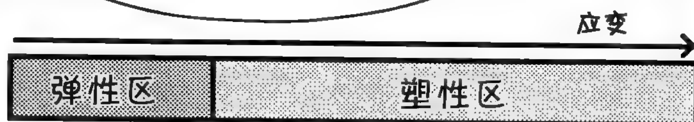
与刚才所见到的应力与应变的关系图（参考 P123）完全不一样！

不过你们仔细地观察一下，从 *A* 点到 *B* 点的区域，应力与应变成正比关系。

啊，确实是！
这部分我还记得。

从 *A* 点到 *B* 点的区域被称为弹性区。

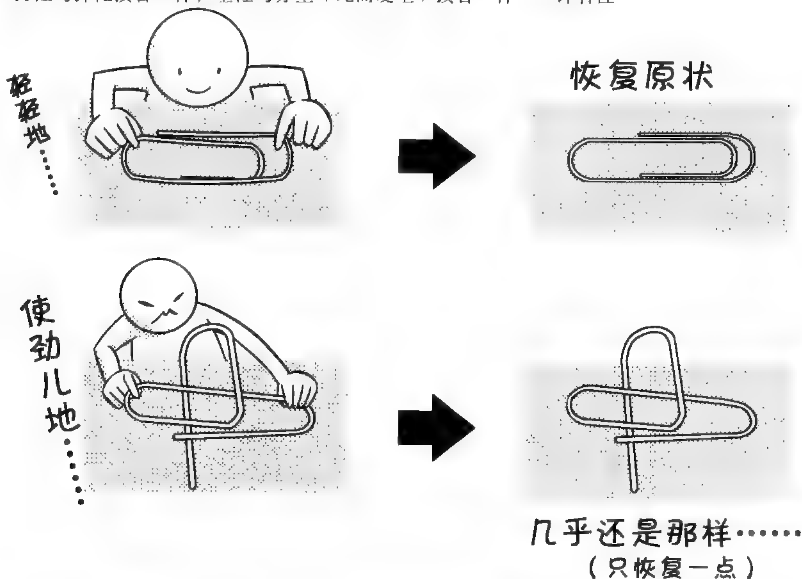
并且从 *B* 点到材料破断的区域被称作塑性区。







※：日语中，男性与弹性读音一样，塑性与苏生（死而复生）读音一样——译者注



我们将撤除力的状态叫做**卸除载荷**，将载荷卸除后依然保持的变形叫做**永久变形（永久应变）**。



呜呜……不过我觉得塑性区还真痛苦啊……

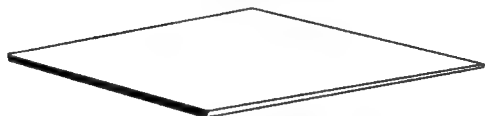
“不能恢复原状”，我似乎感觉到它悲惨的声音。

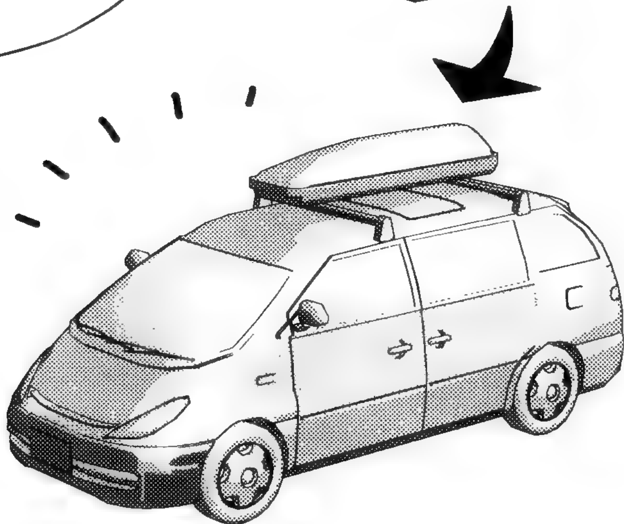
不是你想象的那样哦，NONO。

我们将材料因变性而不能恢复原状的现象叫做塑性现象……

例如，在制造汽车车身时，就是利用了这种塑性现象才能够造出车身的形状！

★金属板……





★变成车的形状！

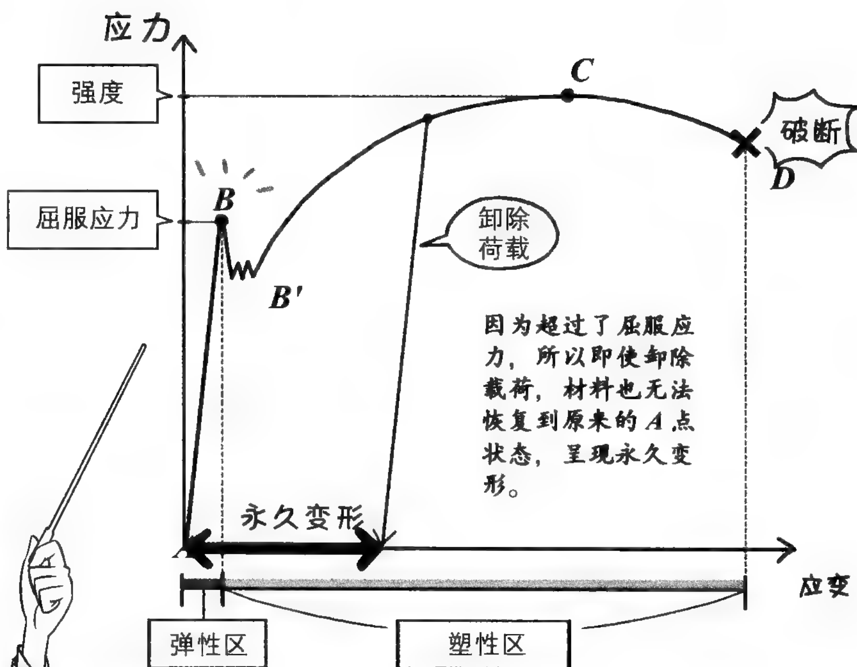
利用塑性现象可以制造出各种东西的形状啊。

塑性是设计不可缺少的啊！

设计的基准（屈服和强度）

另外，请再看一下此图。

“弹性区”和“塑性区”的分界点 B 点是非常重要的一点。



将 B 点称为屈服点，将位于 B 点的应力叫做屈服应力。

当应力超过屈服应力时

永久变形

嗯，也就是说当应力超过屈服应力时，材料将无法恢复到原来的状态……从而呈永久变形吧。

没错！另外在此图中的最大应力 C 点被称为材料的强度。

当应力超过材料强度时

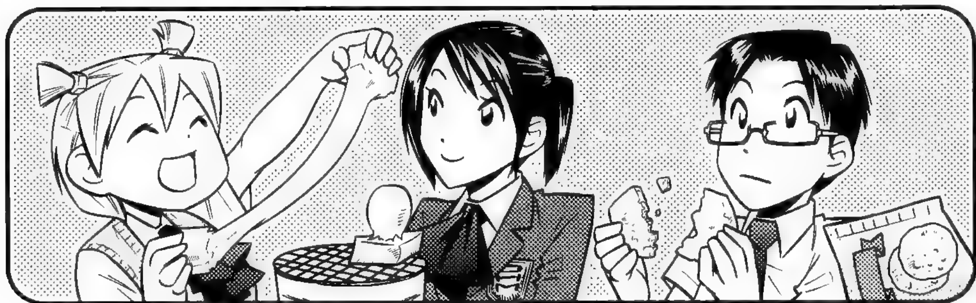
一旦应力超过这个强度，材料将无法支撑此力，也就是说材料会损坏……

原来如此。在制作东西的设计基准中，屈服应力和材料强度是如此重要啊！

我也明白了！

3 具有柔韧性的材料和具有脆性的材料

柔韧性？脆性？（塑性材料和脆性材料）





那么，作为今天的最后内容，让我来讲解一下**“塑性材料（又称延性材料）”（ductile material）**和**“脆性材料”（brittle material）**吧。



延性、脆性……？
是延展的“延”、脆弱的“脆”吧？



没错！首先请你们想象一下烤年糕和脆饼干。当我们对年糕施加力时，它会变大（变形）后再从中间断开，而当我们对脆饼干施加力时，脆饼干几乎不会变形而是突然一下子就破碎了。是这样吧？



年糕和脆饼干……啊，确实是那样。



塑性材料和**脆性材料**也是有如此区别哦。像低碳钢、铝合金、铜等多种**金属**都是**塑性材料**。它是指**在破坏断裂之前会发生大的塑性变形的材料**。
另外，像**铸件、玻璃、陶瓷**等材料是**脆性材料**。这种材料不会发生塑性变形而会突然破损。脆性材料是指**不发生塑性变形就会直接破损的材料和塑性变形小的材料**。



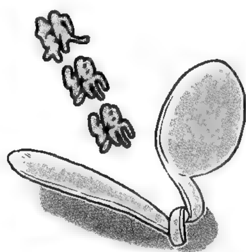
原来如此……
NONO 以前就将吃饭时用的金属汤匙用力弄弯过。那是因为**塑性材料会发生塑性变形**啊。



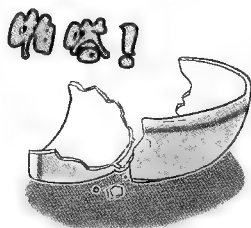
嗯，我在家也曾因为没拿稳而打破过陶瓷茶杯。茶杯一瞬间就破裂了。那是因为**脆性材料不会发生塑性变形而直接破裂了**啊。



你们两人可真会损坏东西啊……
不过，金属汤匙和陶瓷的确是很好的例子哦。



塑性材料



脆性材料

从西本家的茶杯很干脆地破裂了这一例子中可以看出，**“如果脆性材料有了伤痕或者对它施加冲击载荷，脆性材料会轻易破裂”**，因此难以将它们用到需要承受力的地方。像陶瓷之类的东西，如果对它轻轻地用力，它也能够产生很大的支撑力，但是如果用石头敲击一下陶瓷，它就会轻易地破裂。

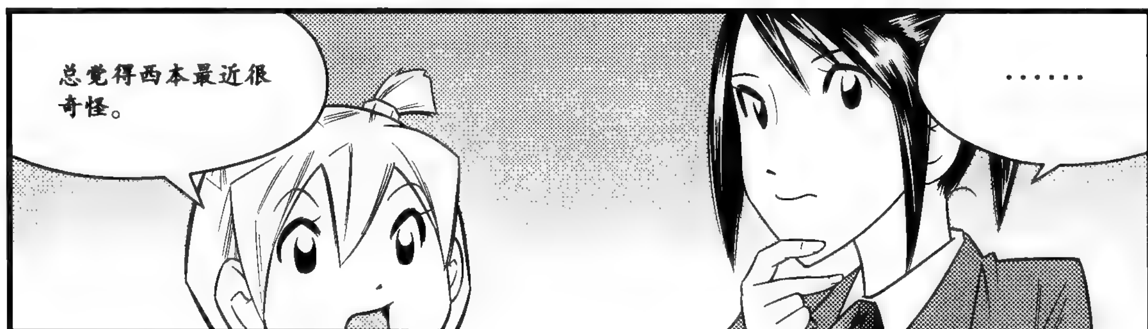


嗯，我明白了。我也曾打破过玻璃杯和花瓶，还不止一两次……



总之，这些特性都会成为选择**具有强大支撑力构件**的材料时的重要因素。你们要记住哦。


今天我很累了！
要不，我就先走了？


……
总觉得西本最近很奇怪。


为什么这间屋子没有被利用呢？
虽然我不知道这间屋子的缘由，
但是我要使用这间屋子!!
我想在这里偷偷地放书！
……西本！


嗯，灰尘太多了，感觉好像会
有幽灵出现一样……
反正我也不相信这些!!


啊，尾濑会长!!


我不是把空屋子占为己有，而是在有效地利用日本有限的土地和空间……!!
不，不!
这……!!


是吗？
最终还是被你发现了啊！


咦？
不怎么生气？


详细情况我明天再告诉你。因为我还要准备一下。
等，
等等!


到底是怎么回事……

第5章

应力的计算方法




今天我们也要学习……
不过，上完课后我将会告诉你们一件重要的事情。


我有东西想给你……


不会吧……！
要在NONO的眼前给他情书？
退出活动室劝告
终于来了啊……！
尾濑会长给我的信也太可怕了吧……


不，
不是那样的啦。
嗯……
说来话长，详细情况还是待会再说。



嗯！
要制造出不会轻易被损坏的东西，就要使“产生的应力 < 材料的强度”（参考 P71 和 P134）

没问题……

产生的应力 < 材料的强度

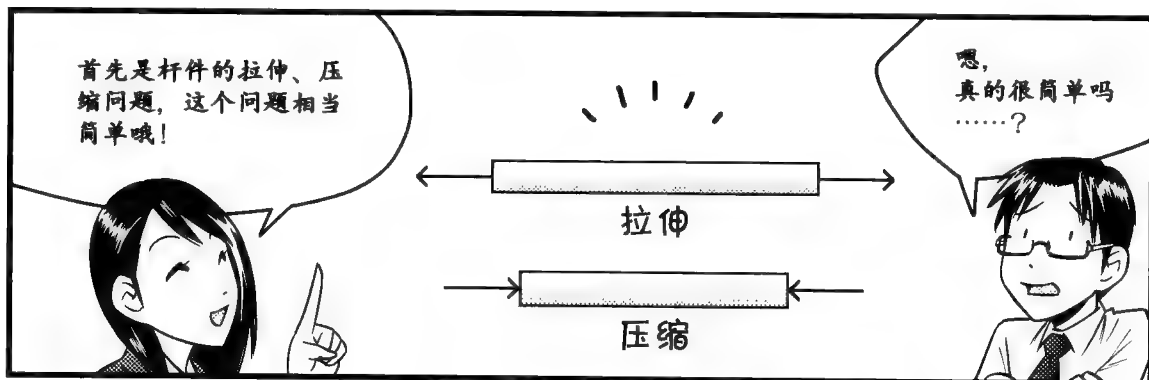
啪嚓

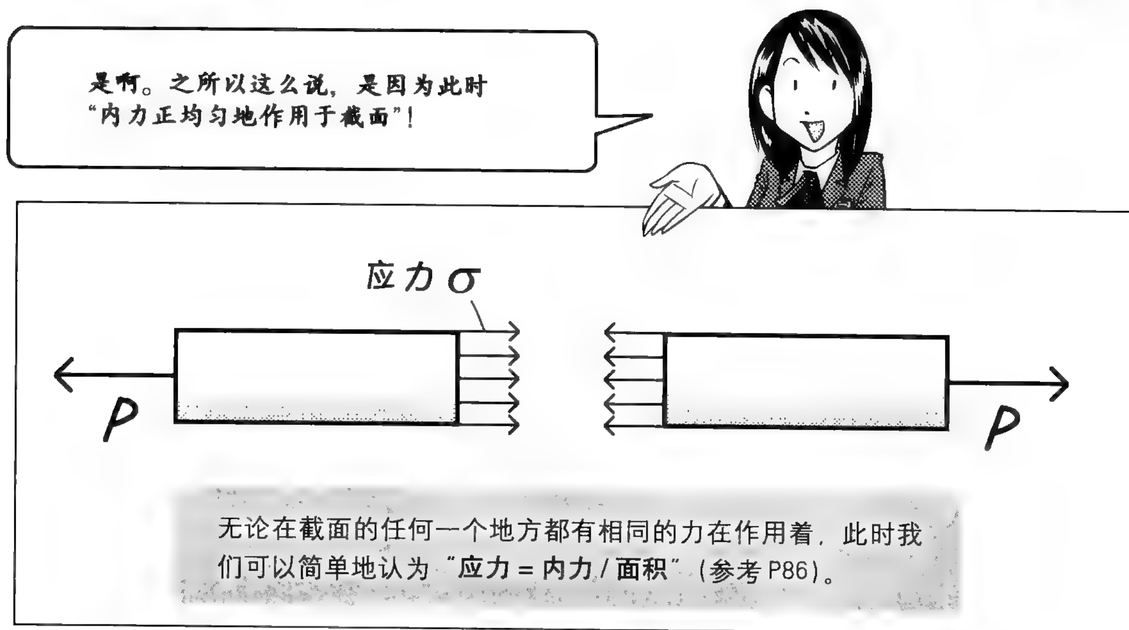
哎呀

产生的应力 > 材料的强度

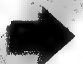


1　思考杆件的拉伸、压缩问题







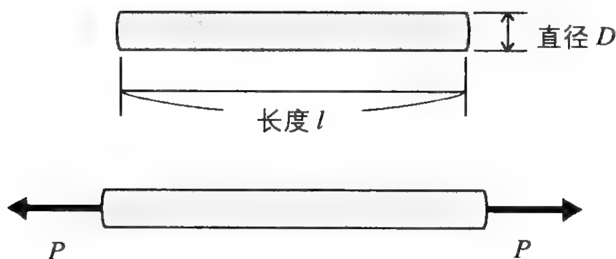


拉伸载荷和正应力的关系、伸长量的计算



那么，首先是杆件拉伸、压缩问题。这个问题比之后的两个问题要简单哟。这里会出现之前学过的各种公式，让我们一边复习这些公式一边进一步地学习！

在此我们来考虑一下杆件在**拉伸变形**中“**拉伸载荷和正应力的关系**”以及杆件的“**伸长量（变形量）**”。



如上图所示，当用载荷 P 拉直径为 D、长度为 L 的杆件两端时，此时杆件的伸长量是多少？让我们来计算一下。

如果用希腊字母 λ（lambda）表示圆杆的伸长量（变形量），那么利用第 3 章的公式（P99）就能够将正应变 ε 表示成如下这样。

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L} \quad ①$$

另外，假设圆杆的杨氏模量为 E，如第 4 章（P121）所示，圆杆的正应力 σ 为如下这样。

$$\sigma = E\varepsilon \quad ②$$

这两个公式是对之前所学过内容的复习。在之后的计算中，我们将会用到这两个公式。



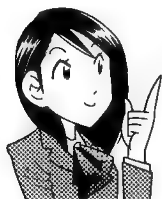
另外就是关于拉伸载荷 P 与正应力 σ 的关系，假设**内力正均匀地作用于直径为 D 的圆杆截面**，那么根据第 2 章的公式（P72），如下关系式成立。

这个关系式表示了**拉伸载荷 P 与正应力 σ 的关系**。

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi D^2 / 4} \quad ③$$



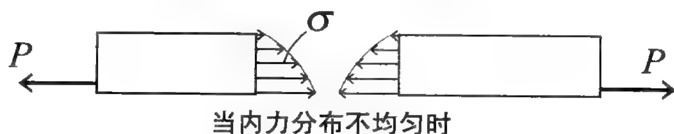
哦！因为无论在截面的任何一个地方都有**相同的力**在作用着，所以可以使用“**应力 = 内力 / 面积**”这一公式。



没错！因为圆的面积 = 圆周率 × 半径的平方，所以分母截面积 $A = \pi(直径\ D/2)^2 = \pi D^2/4$

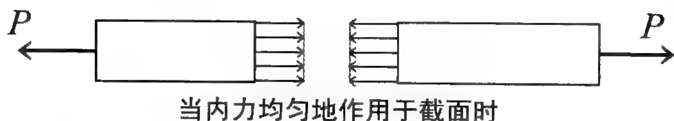
另外如下图所示，当内力分布不均匀时，与内力均匀地作用截面时的情况不同，此时“**各处的应力不同**”。

因为涉及更加复杂的公式，所以处理起来有点难。



当内力分布不均匀时

虽然各处的应力分布一般不同，但是在轴向拉伸杆件时，偶尔应力分布会均匀。



当内力均匀地作用于截面时

可以将均匀分布看做应力分布的特殊状况。



咦，如果各处的应力不同，就会很麻烦吧？要是这两种情况下处理方法没有区别就好了。

那么，言归正传，让我们继续来思考一下伸长量（变形量）λ。根据前面的公式①、②、③，可以得到如下公式。

$$\frac{P}{\pi D^2/4}=E\frac{\lambda}{L}$$

如果要求出上式中的 λ，可以用如下公式来表示。这就是表示伸长量 λ 的公式。

$$\lambda=\frac{P\times L}{E\times\pi D^2/4}=\frac{4PL}{\pi ED^2} \qquad ④$$



你们看，这就是表示伸长量 λ 的公式。只要将前面的公式联立起来求解，就可以得出它，这很简单哦！

如果给出拉伸载荷 P、杨氏模量 E、圆杆直径 D，就能够利用这个公式计算出伸长量 λ。

这个公式表示 **"伸长量与拉伸载荷 P、圆杆长度 L 成正比，与杨氏模量 E、圆杆截面积 $\pi D^2/4$ 成反比"**。

也就是说拉伸力越大或杆件越长，伸长量就越大；而材料越难变形或杆件越粗，伸长量就越小。



另外，如果不是拉伸载荷而是**压缩载荷**作用于杆件时，只要把式子④中 P 换成 $-P$ 就可以了。**此时伸长量 λ 为负值**，这意味着**杆件收缩了**。

通过正负就能表示出杆件的状态。如果习惯了数学公式，还真方便啊。



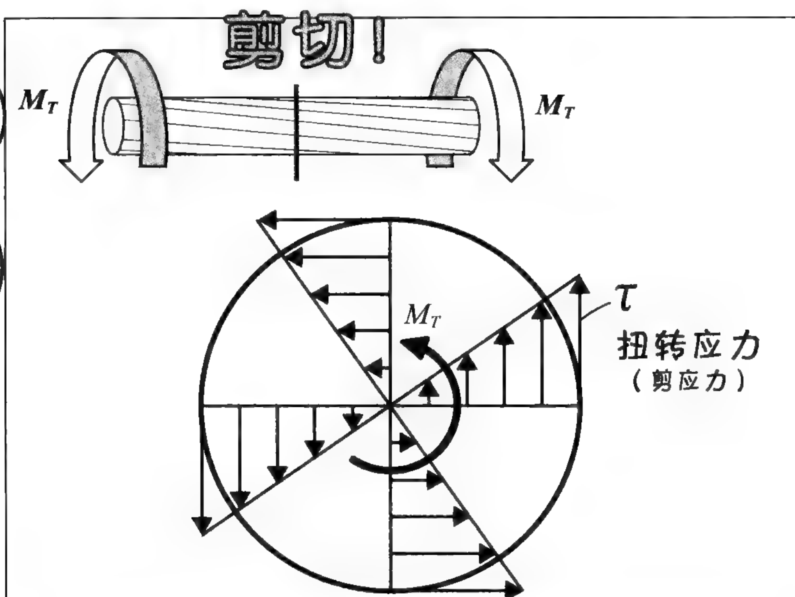


没错！通过数学公式就能够明白拉伸变形与力以及杆件尺寸的关系。这就是所谓的定量表示。专家们也觉得"用数学公式来表示清晰而易懂"。用数学公式表示各种关系很重要哦。

2　考虑杆件的扭转问题

下面是杆件的扭转问题。首先请看此图！

这是圆杆扭转变形时的“应力分布”情况。



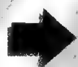
当杆件发生扭转变形时，在截面所产生的这样的剪应力被称为“扭转应力”。并且这个分布图是以我们已经学过的公式为基础而描绘出来的（详细内容请参考P148）。

哇，各处的应力不一样！

某点的扭转应力（剪应力）与该点到中心的距离成正比，该点离中心越远，该点的应力越大。

像这样，当应力分布不均匀时，计算会变复杂。

让我们来仔细思考一下吧！



扭矩和剪应力的关系、扭转角的计算



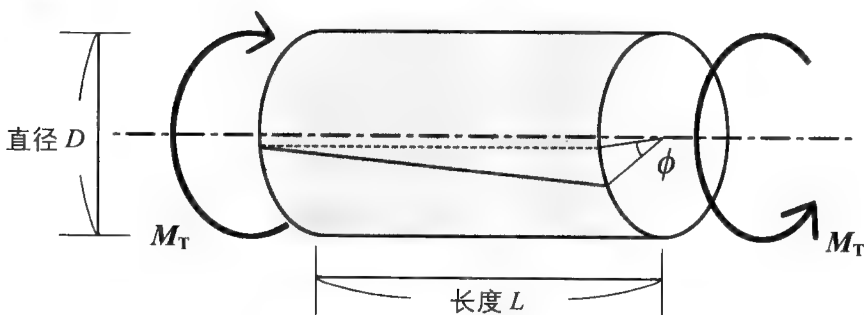
那么，接着是杆件的扭转问题。尾濑会长说：“当应力分布不均匀时，计算会变复杂。”

此时，好像考虑微面积等微小要素（微元）很重要。嗯，似乎有点难，让我们一起加油吧！

在此将要考虑一下杆件在扭转变形中**扭矩和剪应力的关系**以及**扭转角**。



之前我们曾探讨过关于杆件扭转变形的情况（第 3 章 P104）。因为与前面的内容有关联，所以要重新看一遍前面的内容复习一下。



如上图所示，当给直径为 D、长度为 L 的圆杆两端施加扭矩 M_T 时，其扭转角 ϕ 是多少呢？让我们来计算一下。

在此我先列举出之前学过的两个公式。在之后的计算中我们将会用到这两个公式。用扭转率 ω（单位长度扭转角 ϕ/L）来表示距离杆轴 r 处的剪应变 γ 就是如下所示的公式（参考 P107）。

$$\gamma = r\phi/L \quad \text{也就是} \quad \gamma = \omega r \qquad ⑤$$

并且假设圆杆的剪切弹性模量为 G，因为剪应力 $\tau=G\gamma$（参照 P121），则如下关系式成立。

$$\tau = G\gamma = G\omega r \qquad ⑥$$



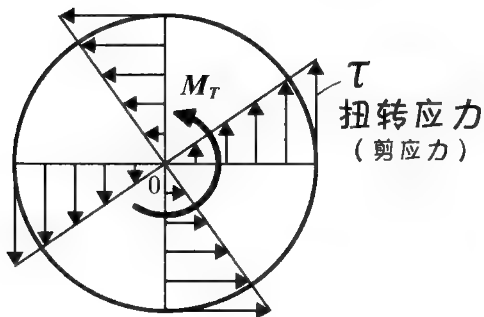
请看式子⑥！这个式子是**剪应力 τ 与距离 r 的关系式**。也就是说，根据这个式子画出了你们刚开始所见到的圆杆扭转变形时的应力分布图。



噢！原来是通过我们之前所学过的东西画出了那个应力分布图啊。

那么接着让我们来考虑一下**扭矩 M_T 与剪应力 τ 的关系**。不过，如公式⑥所示，**在扭转变形中的应力（剪应力）与半径 r 成正比**。这稍微有点难。

根据公式⑥可以得出圆杆扭转变形时的应力分布情况，如下图所示。



CHECK!

扭转应力（剪应力）在中心处为 O；某点的扭转应力与该点到中心的距离成正比，该点距离中心越远，该点的扭转应力越大；在圆外周处的扭转应力最大。并且应力向着圆周方向（垂直于半径的方向）作用。

怎么样？你们都明白各处应力值不一样这一点了吧。

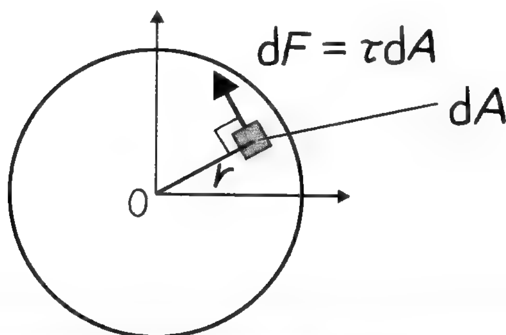
因为要利用数学公式根据不同的应力来求扭矩，所以看起来很麻烦。请不要着急，让我们来认真地思考一下。

这次我们要探讨的是**扭矩 M_T 与剪应力 τ 的关系**。若是拉伸问题，关于拉伸载荷 P 与正应力 σ 的关系，只要将它们代入公式“应力 = 内力 / 面积”就可以了，这非常容易。但是，这次似乎有些难度。





呵呵。其实在这个问题中也要用到“应力 = 内力 / 面积”这个公式。不过要使用这个公式需要一些诀窍。
之前我已经讲解过微面积等微元（第 2 章 P89）。接着我们要活用这些微元来进行计算。



作用于受到扭转的圆杆截面的剪应力

首先如上图所示，让我们来考虑一下作用于**距离圆杆截面中心 r 处的微面积 dA 微元**上的力 **dF**。

这个 d 与 Δ（delta）完全一样，经常用来表示非常小的量。

因为面积越小，在微元中的应力变化就越小，所以在微元上可以认为“力 = 应力 × 面积”。

原来如此！如果面积相当小的话，就可以认为在微面积上各处的应力相等。这样的话，就能够使用公式“力 = 应力 × 面积”。



另外，利用公式⑤、公式⑥可以将 dF 表示为如下公式。

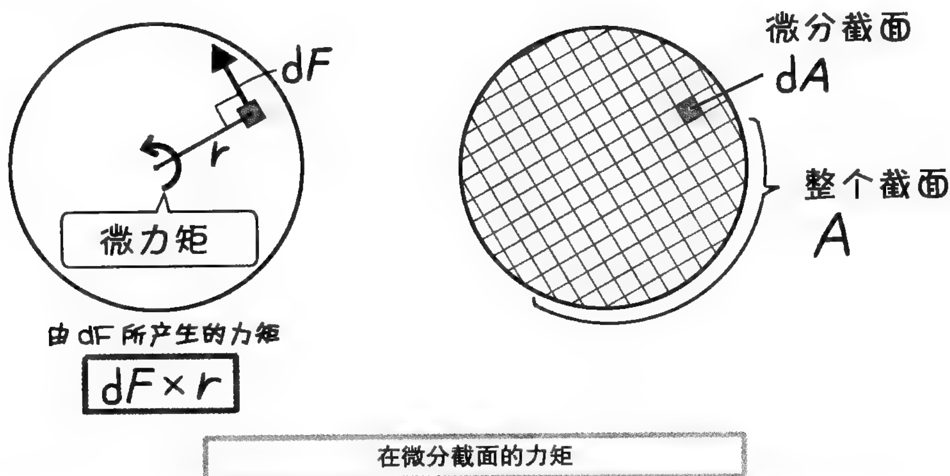
$$dF = \tau \times dA = G\gamma \times dA = G\omega r dA \qquad ⑦$$



这样就可以表示出作用于微面积的“微小力 dF”。下面我们来思考一下这个微小力所产生的力矩。

接着来探讨一下力矩。

因为力矩 = 力 × 力臂的长，所以微小力 dF 围绕圆杆中心轴旋转时所产生的微力矩为力 dF 与力臂长 r 的乘积。



在微分截面的力矩

并且**把整个截面的“微力矩”相加就是剪应力围绕中心 O 转动时所产生的力矩（内力）**。

位于整个截面的微力矩……虽然这些微力矩分别大小不一，但是把它们全部加起来的话，就能够求出作用于整个截面的力矩。

噢！我明白了“要利用微元法，考虑微小要素，最终将它们相加”。但是这个加法运算如何进行呢？把所有的微小量都相加太麻烦了吧！





好的！下面要出场的是**积分**。让我们继续吧！

利用**积分**可以表示“将整个截面的微力矩相加”。积分就是“**把分割成很多小块的东西集中起来**”，它经常被用来求体积和面积。

即使不擅长积分运算，也要理解“将整个截面的微力矩相加”的含义。

微截面的力矩

力 dF，半径

$$\underbrace{G\omega r dA}_{\text{力 } dF} \times \underbrace{r}_{\text{半径}}$$



整个截面的微力矩相加

截面 A 的力矩 = 内力

$$\iint_A G\omega r \times r dA = \iint_A G\omega r^2 dA$$

积分



积分包括符号 $\int$（积分）、$\iint$（二重积分），或许你们会感觉很难。不过，首先要明白公式的含义，这一点比计算更重要。

在此，因为是关于截面 A 的积分，所以使用了 $\iint_A$（二重积分）。这个式子的含义为：把作用于整个截面所有微小要素的力矩全部相加。



原来如此。虽然积分看起来很难，但是只要明白它的含义和符号，就很方便哦。

另外，因为**外力 = 内力**，所以**这个内力必定等于外力的扭矩** M_T。也就是说，下面的公式会成立。

$$M_T = \iint_A G\omega r^2 dA = G\omega \iint_A r^2 dA = GI_P\omega \quad ⑧$$



哇！马上就出现了未曾见过的符号，I_p 是什么!??



截面有形状吧？若是圆杆截面，其形状就为圆形。I_p 被称为**截面极惯性矩**，它是由截面形状所决定的量。利用 I_p 这个系数，公式就会简洁明了。



嗯。确实没有了积分，公式就会简洁明了。

截面极惯性矩 I_p 是材料力学中的**重要系数之一**。

截面极惯性矩	$I_{\mathrm{P}} = \int_A r^2 \mathrm{d}A$

关于具有代表性的截面形状，其截面极惯性矩见附录（P217）中所示，请大家确认一下。我们将剪切弹性模量 G 和 I_p 的乘积 GI_p 叫做扭转刚度，扭转刚度表示材料应对扭转运动难以产生变形。

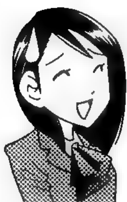
另外，截面形状为圆形的圆杆，可以用如下公式来表示其 I_p 值。

$$I_{\mathrm{P}} = \iint_A r^2 \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^{D/2} r^2 \times r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{D/2} r^3\mathrm{d}r\right) = (2\pi)\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^4\right\} = \frac{\pi D^4}{32} \quad ⑨$$

※ 当杆件为圆杆时，如果使用极坐标（微面积 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$），计算起来就会很轻松。如果杆件截面是长方形，就使用 x-y 直角坐标（微面积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$）。详细内容将会在 P155 中说明。



停！虽然利用 I_p 这个系数后公式会变得简洁明了，可是 I_p 值的计算不是很麻烦吗？简直就是骗人！！



噢，不要激动，西本！关于这个 I_p 和之后要出现的 I，只要明白截面形状就可以了，其计算结果会作为截面尺寸函数被收录到材料力学的教科书和工学手册中。
实际上只要用电子计算器计算一下这个公式就可以了，一般不会涉及这么难的二重积分。

是吗？那我就放心了！那样的话，应力计算就不会那么难了。





我觉得只要理解了步骤，计算本身是很容易的。另外，利用这个 I_P 后，整理一下公式就能够得到如下公式。这就是**表示圆杆扭转角的公式**！

根据公式⑧、公式⑨，可以将圆杆的扭转角 ϕ 表示成如下公式。

$$\phi = \frac{M_T L}{G I_P} = \frac{32 M_T L}{\pi G D^4} \tag{⑩}$$

利用这个公式，只要给出扭矩 M_T、剪切弹性模量 G、圆杆直径 D，就能计算出扭转角。

并且这个公式表示**扭转角与 M_T、圆杆长度 L 成正比，与剪切弹性模量 G、直径的 4 次方 D^4 成反比**。

因此要使扭转角变小，只要使剪切弹性模量 G 和 I_P 变大就可以了。

原来如此。要使扭转角变小，就应该注意杆件的材料性质和截面形状。



另外根据公式⑩、公式⑤、公式⑥可以得出剪应力 τ。

这个公式就是表示“**扭矩 M_T 和剪应力 τ 关系**”的公式。

$$\tau = \frac{M_T}{I_P} r = \frac{32 M_T}{\pi D^4} r \tag{⑪}$$

这就是我们要求的公式。终于出来了！真是长路漫漫啊！

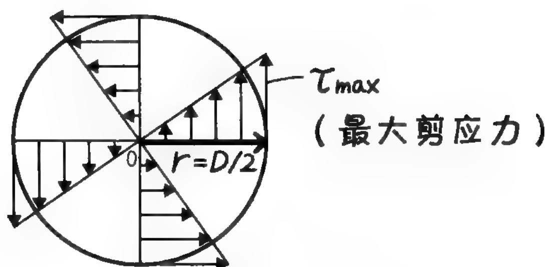




嗯！不过，还要继续哦！那就是根据这个公式求**最大剪应力**。

另外，根据公式⑪可以求出**最大剪应力**。因为最大剪应力是当 r 最大时，也就是当 $r=D/2$ 时（在圆周上）所产生的剪应力，所以如下列公式所示。

$$\tau_{\max}=\frac{32M_{\mathrm{T}}}{\pi D^{4}}\times\frac{D}{2}=\frac{16M_{\mathrm{T}}}{\pi D^{3}}$$



要制造出不易损坏的结构体，在设计时必须满足这个不会损坏的条件“产生的应力 < 材料强度”。

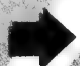
因此必须求出会产生的**最大应力**。



我已经讲了很多了，你们都理解了它们的思考方法和含义吗？试着整理一下我讲过的内容，可以归纳为如下步骤。

- 思考微面积
- 思考在微面积上的力和力矩
- 利用积分考虑整个截面上的力矩（内力）
- 利用截面极惯性矩等整理公式
- 求表示应力的公式
- 求最大应力

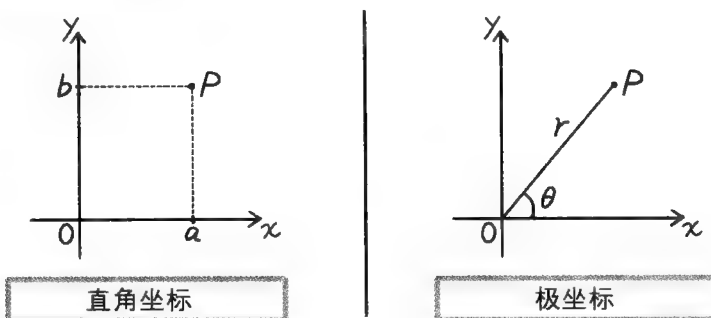
这种思考方法在下面的弯曲问题中也通用。让我们好好地理解这个步骤！



$rdrd\theta$是什么？（微面积的表示方法）

在刚才的计算过程中（P152 公式⑨）曾出现过 $rdrd\theta$，这个 $rdrd\theta$ 和 $dxdy$ 是**微面积。为什么它们表示的是微面积呢？**在此我将会做一下补充说明。

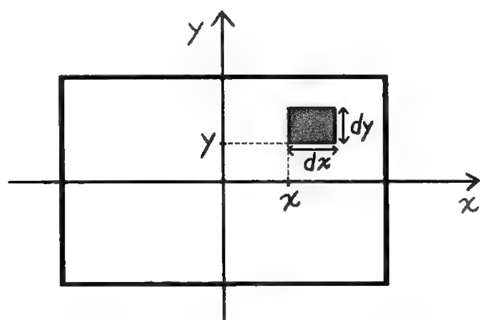
在进入正题之前，首先来看看直角坐标和极坐标有何不同。请看下图。要表示同一个点 P 的位置，通常有两种方式。



直角坐标利用在坐标上指定"x 的值为 a、y 的值为 b"这一方法来表示点 P 的位置。

极坐标是用原点 O 和点 P 连接而成的线段 OP 与 x 轴所形成的角度 θ 表示点 P 的方向、用距离 r 表示 OP 的长度，由此来表示点 P 的位置。

首先让我从简单的内容讲起。当**积分截面为长方形时，要使用 x-y 直角坐标（微面积 $dxdy$）**请看如下所示图中的表示方法。



CHECK！
当表示微小的变化时，要使用 d。

dx 是指"比 x 增加了一点的量"、dy 是指"比 y 增加了一点的量"。上图中的灰色长方形表示的是纵向长和横向长都为"微小量"的微面积。并且微面积的纵向长为 dy、横向长为 dx。

因此这个灰色长方形的面积（微面积）为纵向长 × 横向长 $=dxdy$。

下面继续吧！当像圆杆一样截面为圆时，**使用极坐标（微面积 $rdrd\theta$）的话计算就会很方便。**这个方法有点复杂，不过用图来表示的话就更容易让人理解。

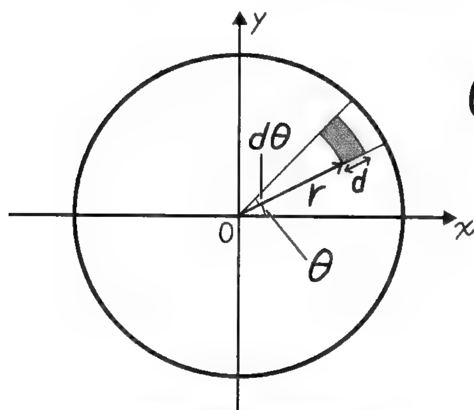


图1



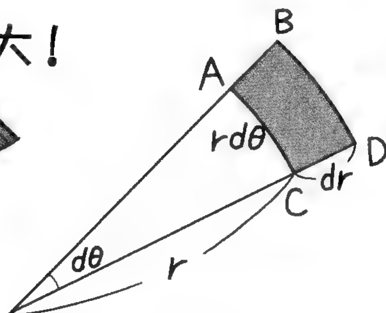


图2

请看上图 1。因为是极坐标，所以角度 θ 和到原点 O 的距离 r 很重要。并且在这里也要使用 d 来思考微小的变化量。

$d\theta$ 是指"比 θ 增加了一点的角度"、dr 是指"比 r 增加了一点的距离"。

请看图 1 的放大图图 2。

根据弧长公式（弧长 = 半径 × 角度）得出弧 AC 为 $rd\theta$。

并且在这里要考虑非常小的面积。请你们想象一下。如果面积 $ABCD$ 为非常小的面积，我们就可以忽视微小的曲线，将它看成简单的"直线"来考虑。

也就是说，可以将微面积 $ABCD$ 看成简单的长方形！那样的话，灰色部分的微面积就为"纵向长 $rd\theta$ × 横向长 dr"。

因此，灰色部分的面积（微面积）为纵向长 × 横向长 $=rdrd\theta$。

另外微面积 $ABCD$ 的面积为扇形 OBD 的面积——扇形 OAC 的面积 $=rdrd\theta(1-dr/2r)$，可以证明出当 dr 接近无穷小时其结果为 $rdrd\theta$。

怎么样？你们明白**微面积 $rdrd\theta$ 和 $dxdy$** 的意义了吗？它们在下面的问题中也会出现（P162），请你们一定要好好地记住它们。

3 思考杆件的弯曲问题

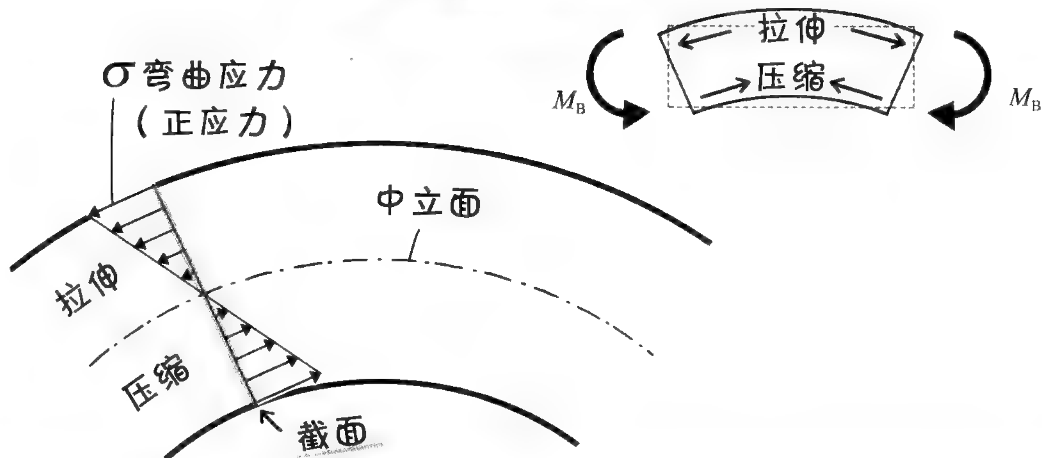
最后是杆件的弯曲变形问题。

注意截面的形状！

截面为圆形的圆杆当然是等截面杆件，另外还有截面为长方形的杆件、有孔的杆件，

当截面为相同形状的杆件（等截面杆件）弯曲变形时，其应力分布状况如下图所示。

甚至在像铁轨那样的截面上也同样可以这样考虑它的应力分布状况。



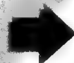
杆件在弯曲变形时在截面上产生的如图所示的**正应力**被称为“**弯曲应力**”。并且我们可以以之前已经学过的公式为基础将这个分布图画出来（关于详细内容，请参考 P159）。

哎……
各处的应力还是不一样啊。

嗯，某处的弯曲应力（正应力）与该处到中立面的距离成正比，该处离中立面越远，弯曲应力越大吧？

没错！并且在上面部分为拉伸状态、在下面部分为压缩状态。

那么我们回到问题上来吧！



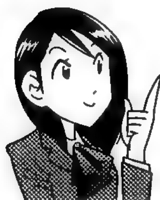
弯矩和正应力的关系、曲率的计算



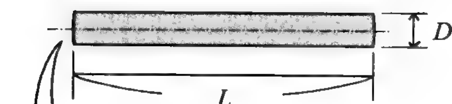
下面是杆件的弯曲问题。这也属于应力分布不均匀的情况。那样的话，还是要考虑微面积等微元吗？

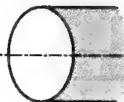
哎，总之让我们先试试看吧。

在此处我们将讨论一下在杆件**弯曲变形中弯矩和正应力的关系以及曲率 =1/ 曲率半径这一公式**。

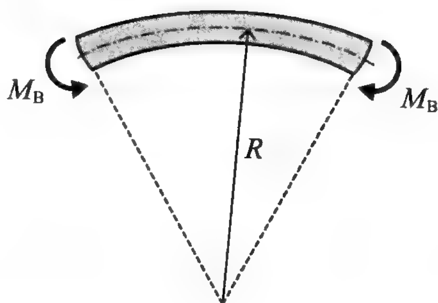


之前我们曾讨论过杆件弯曲变形的问题吧（第 3 章 P108）。因为此处会涉及之前的内容，所以让我们再来复习一遍。**曲率半径**是用圆的半径值来表示曲线的弯曲程度。**曲率**是指曲线的弯曲程度。曲率 k 与曲率半径 R **互为倒数关系**。





无论截面形状如何，其计算过程都一样。这次假设截面形状为椭圆。



如上图所示，在“长度为 L 的等截面杆件”的两端施加弯矩 M_B 使杆件弯曲，让我们来计算一下此时杆件的弯曲变形。

在此我们先来列举一下**之前学过的公式**。如果用 R 表示杆件弯曲变形时的曲率半径，则距离杆件中立面 y 处的正应变 ε 为如下公式（参考第 3 章 P112）。

$$\varepsilon = \frac{y}{R} = \kappa y$$

并且假设杆件的杨氏模量为 E，则**正应力** $\sigma = E\varepsilon$（参考 P121）。利用曲率 k（曲率半径 R 的倒数 $1/R$），如下公式成立。

在之后的计算中将会使用该公式。

$$\sigma = E\frac{y}{R} \quad \text{也就是} \quad \sigma = E\kappa y \tag{12}$$

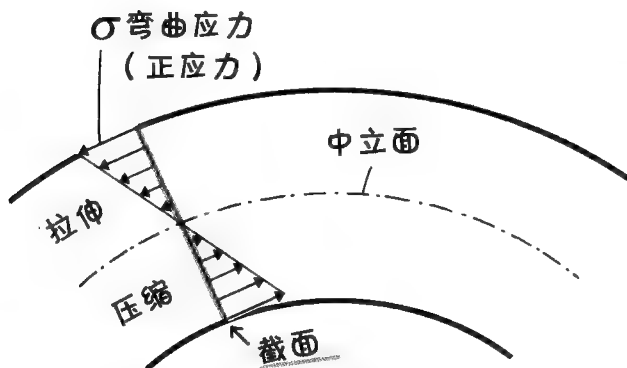


请看公式⑫。该公式为**正应力 σ 与距离 y 的关系式**。我就是根据这个公式画出了你们刚开始见到的**圆杆弯曲变形时的应力分布图**。

那么让我们来思考一下**弯矩 M_B 与正应力 σ 的关系吧**。

在弯曲变形时应力（正应力）会因位置不同而发生变化（即各处的应力不同），我们必须考虑到这一点。这与刚才的扭转变形时的情况一样。

根据公式⑫可以画出如下所示的杆件弯曲变形时的应力分布图。

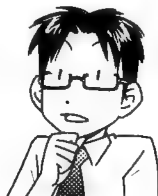


CHECK!
某处的弯曲应力（正应力）与该处到中立面的距离成正比，该处离中立面越远，该处的弯曲应力越大。
并且在上面部分为拉伸状态，在下面部分为压缩状态。

怎么样？关于各处的应力不同这一点，你们明白了吧？

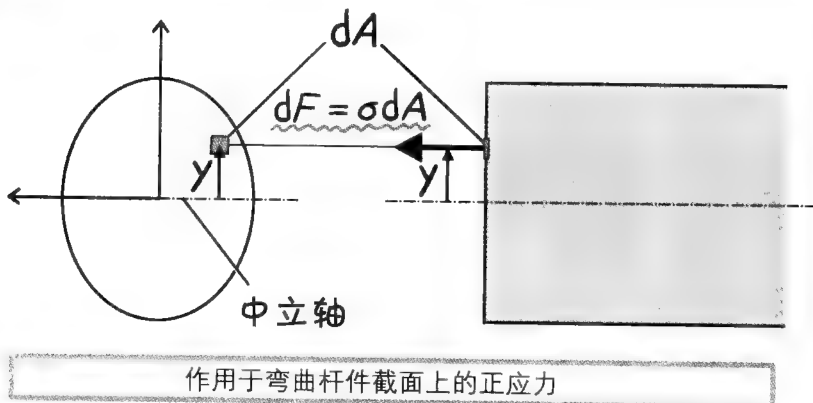
因为要利用数学公式根据各处不同的应力来求弯矩，所以看起来很麻烦。不过我认为只要理解了刚才学过的“扭转问题”，这次理解起来就会更加轻松。

嗯。这次与刚才的扭转问题一样，也要考虑微元吗？





西本，你的理解能力很强。没错，正是如此！
像刚才那样，我们要考虑微面积，根据作用于微面积上的力求出围绕中立轴的“微力矩”。并且要利用积分将整个截面的“微力矩”相加。

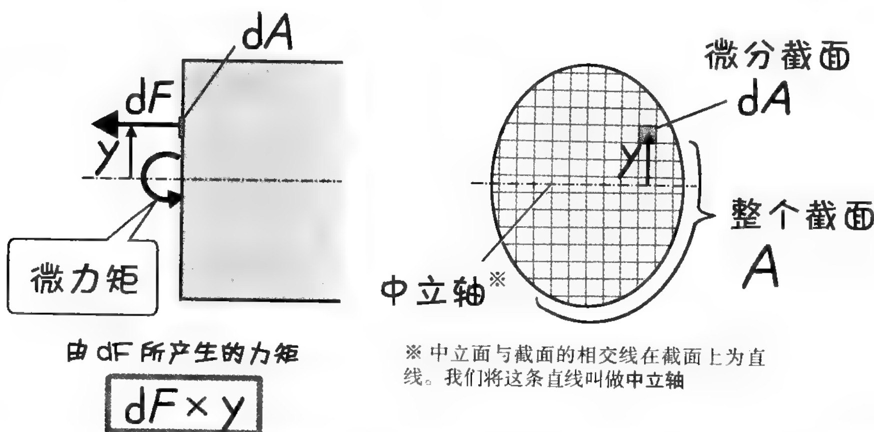


作用于弯曲杆件截面上的正应力

首先，如上图所示，让我们来考虑一下作用于**距离杆件中立面 y 处的微面积 $\mathrm{d}A$** 所构成的截面上的**力 $\mathrm{d}F$**。因为力 = 应力 × 面积，所以可以用如下公式来表示 $\mathrm{d}F$。

$$\mathrm{d}F = \sigma \times \mathrm{d}A = E\kappa y \times \mathrm{d}A = E\kappa y \mathrm{d}A \tag{13}$$

此力围绕杆件中立轴所产生的 **“微力矩”** 为力 $\mathrm{d}F$ 与力臂长 y 的乘积。



作用于微面积的力围绕中立轴产生的力矩

并且将整个截面的微力矩全部相加就是内力（整个截面的力矩），这个内力必定与外力 M_B 相等。也就是说，下面的公式会成立。

$$M_B = \iint_A E\kappa y \times y \mathrm{d}A = E\left(\iint_A y^2 \mathrm{d}A\right)\kappa = EI\kappa \tag{14}$$

哇啊！果然在这里出现了没有见过的符号。这次是 I。



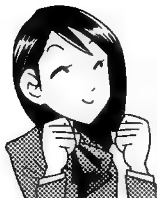


I 是被称为**截面惯性矩**的物理量。
在扭转问题中使用了 I_P（截面极惯性矩），但在弯曲问题中会使用 I（截面惯性矩）。

只要知道了杆件截面的形状，就能够计算出它的截面惯性矩。
截面惯性矩是材料力学中的**重要系数之一**。

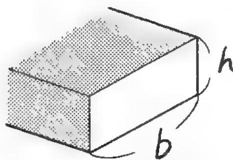
截面惯性矩	$I = \int_A y^2 \mathrm{d}A$

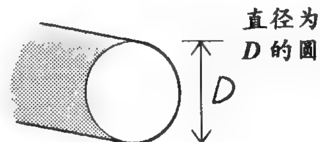
关于具有代表性的截面形状，其截面惯性矩见附录（P217）中所示，请大家确认一下。我们将杨氏模量 E 和 I 的乘积 EI 叫做**弯曲刚度**，弯曲刚度表示材料应对弯曲运动时难以产生变形。



下面我们将要计算一下 I 的值。不过在此要注意的是 ***I* 值与截面形状有关**！不论截面形状如何，此时的计算过程与思考方法都与前面的内容相同。但是，从这里开始会有些不同。这次我们不仅要考虑截面为圆的圆杆，还要考虑截面为长方形的杆件。

高为 h、宽为 b 的长方形





直径为 D 的圆

接着让我们分别来计算一下截面形状为长方形的杆件和截面形状为圆形的圆杆的截面惯性矩 I 的值。

当杆件的截面形状为宽 b、高 h 的长方形时，I 值为如下公式。

$$I=\iint_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-b/2}^{b/2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}x\int_{-h/2}^{h/2}y^2\mathrm{d}y$$

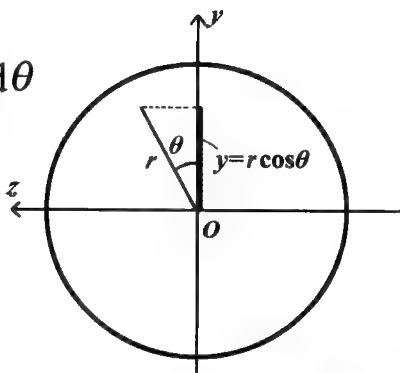
$$=\left[x\right]_{-b/2}^{b/2}\times\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-h/2}^{h/2}=b\times\frac{1}{12}h^3=\frac{1}{12}bh^3$$

当杆件的截面为直径为 D 的圆时，I 值为如下公式。

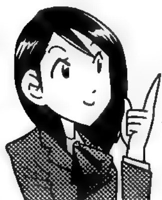
$$I=\iint_A y^2\mathrm{d}A=\int_0^{D/2}\int_0^{2\pi}(r\cos\theta)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{D/2}r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi\times\frac{1}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^4=\frac{\pi}{64}D^4 \quad ⑮$$







整理一下公式⑭、公式⑮，就能够得出杆件的曲率 k（$=1/R$）为

$$\kappa=\frac{1}{R}=\frac{M_B}{EI} \quad ⑯$$

要利用这个公式⑯，例如先通过圆杆直径 D 计算出截面惯性矩 I，接着把材料的杨氏模量 E 和弯矩 M_B 以及 I 代入公式⑯中，就能够求出杆件变形后的曲率 k！

并且这个公式表示**弯曲变形的曲率与 M_B 成正比，与杨氏模量 E、截面惯性矩 I 成反比**。

受到的弯曲力越大，曲率就会越大。如果材料或截面形状越难变形，曲率就会越小。



并且根据公式⑫和公式⑯可以得出正应力 σ。这个公式就是表示“**弯矩 M_B 和正应力 σ 关系**”的公式。

$$\sigma = \frac{M_B}{I} y \tag{17}$$

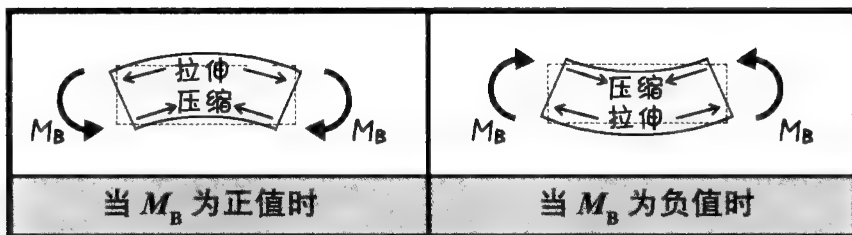
嗯，这就是我们要求的公式啊。终于出来了！



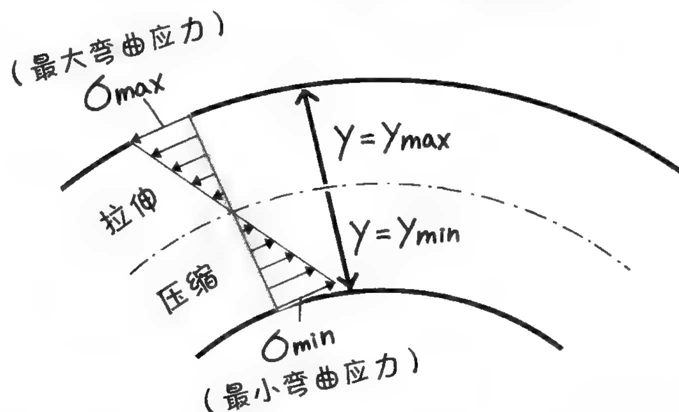
从公式⑰中可以看出：当杆件受到弯曲载荷作用时，在其截面所产生的正应力的大小与截面到中立轴的距离成正比，当弯矩 M_B 为正值时，弯曲杆件的上面部分处于拉伸状态，下面部分处于收缩状态（当弯矩 M_B 为负值时，情况正好相反）。

嗯，也就是说当弯矩 M_B 为正值时，杆件弯曲呈凸形，当 M_B 为负值时，杆件弯曲呈凹形吧。
如果想象一下下图的状态，就很容易明白拉伸和压缩状态。





另外，根据公式⑰可以求出最大弯曲应力和最小弯曲应力。



请看上图。当 y 为最大值时，也就是当 $y=y_{max}$ 时，会产生**最大弯曲应力** σ_{max}。通过如下公式可以求出最大弯曲应力。

$$\sigma_{max}=\frac{M_B}{I}\times y_{max}=\frac{M_B}{Z_1}$$

当 y 为最小值时，也就是当 $y=y_{min}$ 时，会产生**最小弯曲应力** σ_{min}。通过如下公式可以求出最小弯曲应力。当然，y_{min} 为负值，σ_{min} 也为负值。

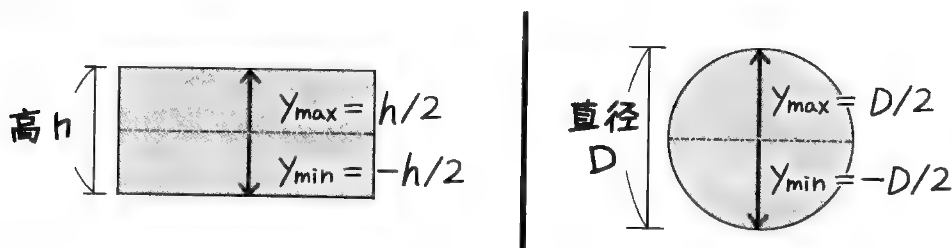
$$\sigma_{min}=\frac{M_B}{I}\times y_{min}=-\frac{M_B}{Z_2}$$

在此，$Z_1=I/y_{max}$、$Z_2=I/(-y_{min})$，我们将 Z_1、Z_2 叫做“**截面系数**”。

如果**截面关于中立轴对称**的话，就有 $Z_1=Z_2=Z$。

与 I 一样，它也是由截面形状来决定的系数，所以关于主要截面的截面系数在教科书中都被计算出来了（请参考附录 P217）。

最后让我们来分别思考一下当截面为“**长方形截面**”和“**圆形截面**”时的**最大弯曲应力**和**最小弯曲应力**。

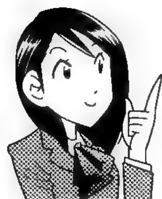


因为当截面为长方形截面时，$Z=bh^2/6$（参考 P217），所以

$$\sigma_{max}=-\sigma_{min}=\frac{M_B}{Z}=\frac{M_B}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)}$$

因为当截面为圆形截面时，$Z=\pi D^3/32$（参考 P217），所以能够求得

$$\sigma_{max}=-\sigma_{min}=\frac{M_B}{Z}=\frac{M_B}{\left(\frac{\pi D^3}{32}\right)}$$



你们明白扭转问题和弯曲问题中的共同点和不同点了吗？利用微面积的思考方法很相似，但是它们使用的系数不一样。

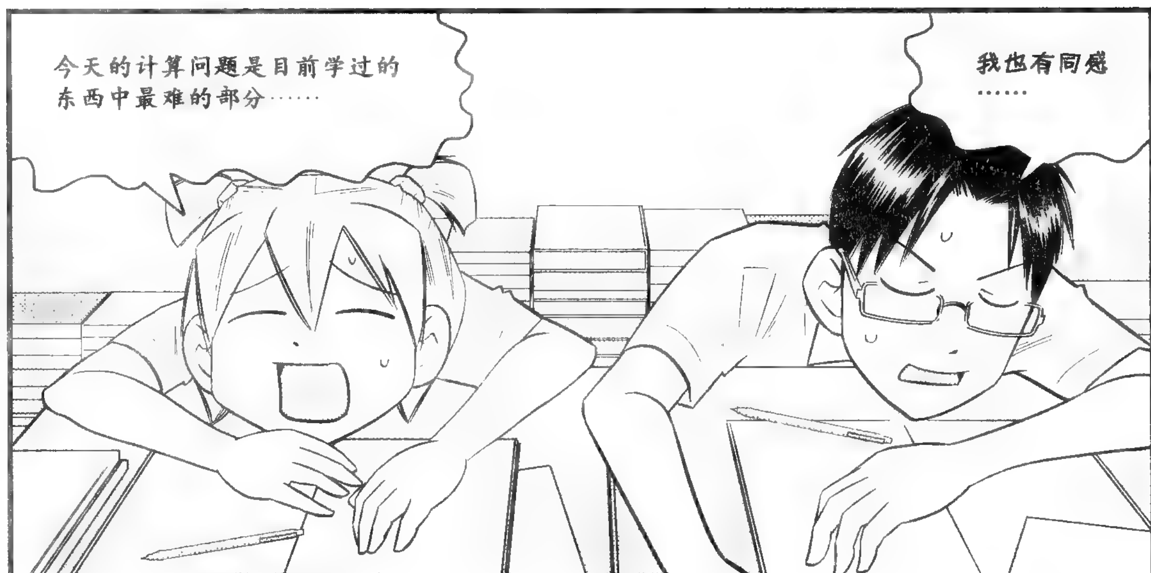
在扭转问题中要使用 I_p（截面极惯性矩）
在弯曲问题中要使用 I（截面惯性矩）

另外这个“极”是指**中心**。请回忆一下应力分布状况。在扭转应力问题上，“到**中心**的距离”很重要。另外在弯曲应力问题上，“到中立轴的距离”很重要。也就是说，截面**极**惯性矩 I_p 是在“**考虑有关中心问题**”时所使用的惯性矩。只要知道了极的含义，就很容易理解了。

今天所学习的应力计算是材料力学中的重要内容。我想只要明白了其思考方法，计算就不会太难了。
并且这次我们求得的公式⑰和公式⑪分别为**弯曲应力公式**和**扭转应力公式**。

下面总结一下这两个公式，你们一定要牢牢地记住它们哦！

$\sigma=\frac{M_B}{I}y$	弯曲应力 = $\frac{\text{弯矩}\times\text{到中立面的距离}}{\text{截面惯性矩}}$
$\tau=\frac{M_T}{I_p}r$	扭转应力 = $\frac{\text{扭矩}\times\text{到中心的距离}}{\text{截面极惯性矩}}$

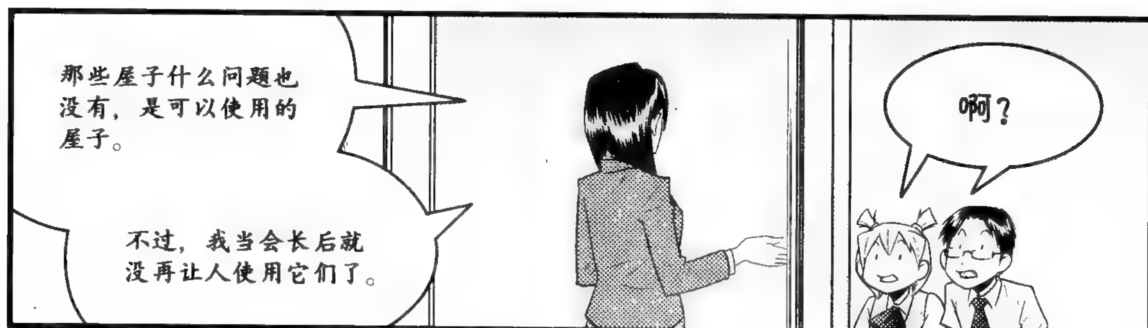

今天的计算问题是目前学过的东西中最难的部分……
我也有同感……


你们辛苦了。
啊，不过刚开始你说的那个信封……
是啊！那是什么啊？


其实……
现在我让你们一起共用活动室，可是实际上在学校里还有好几个空的活动室。


好像西本已经发现了一个。
啊！是吗？
嗯，我确实发现了一个……





我以活动室数量不足为理由让大家共用活动室……

这是我的一个谎言哦！

什么!!

竟然说那样的谎言……!!!





所以在我的谎言被揭穿之时，我想让大家来决定我的去留……

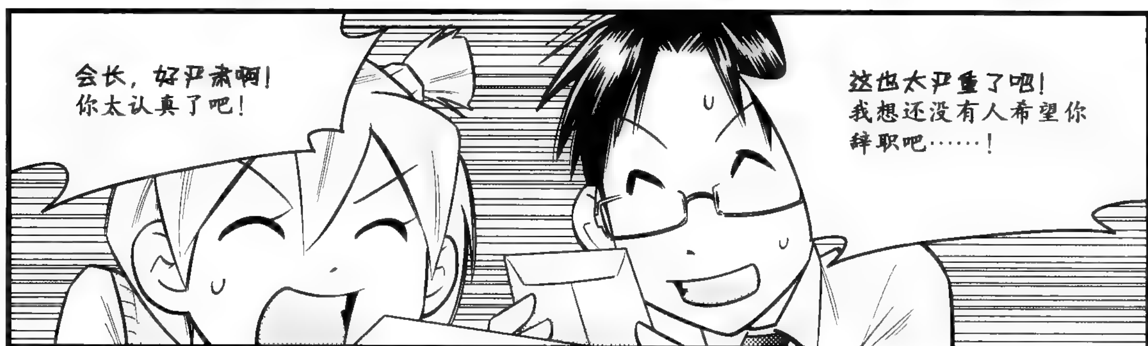
学生会长辞职信

道歉信

咔

咔


哎呀、哎呀!!
嗨哎


这也太严重了吧!
我想还没有人希望你
辞职吧……!
会长,好严肃啊!
你太认真了吧!

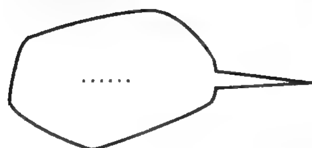

……难道你
们原谅我说
谎了?


……
没有什么问题啦!
我只要能读书就可
以了!
如果可以的话,希望
能够让我使用空屋子
……


撒谎是
不好的!
NONO 不原
谅你!


是啊。


不过，如果你能够再教我们一些有关材料力学的知识，并且协助我做出一个很好的书架。
那时我就原谅你！


……




NONO，谢谢你。
那么，为了制造出书架，我们明天继续学习吧……

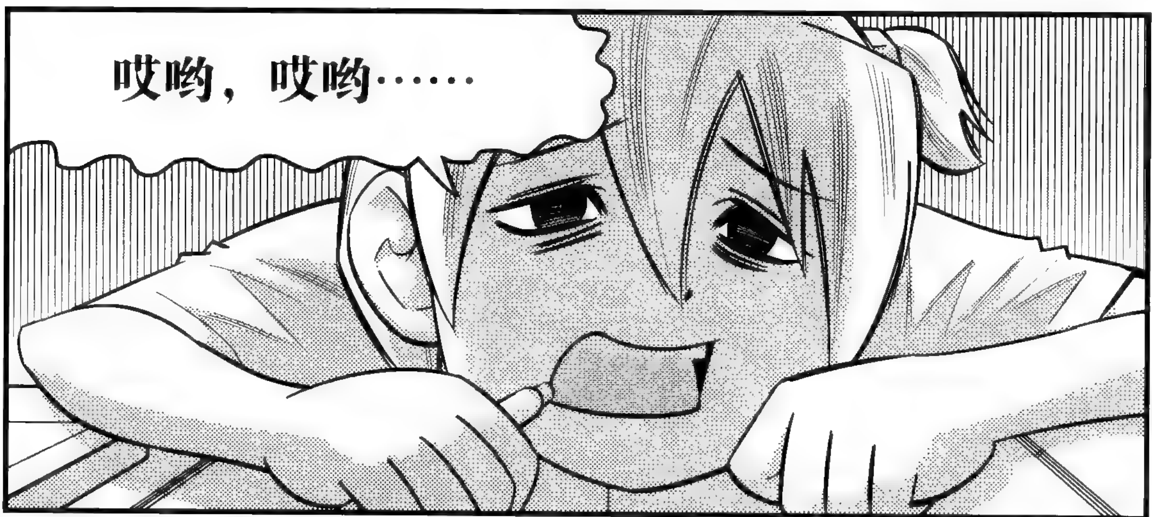

到明天我大致学过的内容就结束了！我也要好好地开始预习了！
哇！
最后一节课我也会尽力的！
好了，看在你尽力的份上就原谅你了……

第6章

材料力学的应用



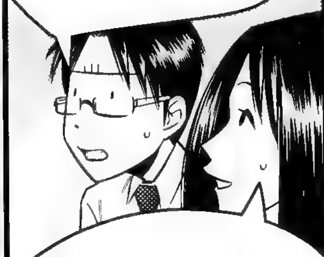

嘎吱
今天是最后的学习啊，
我似乎感觉有点寂寞
……


哎哟，哎哟……

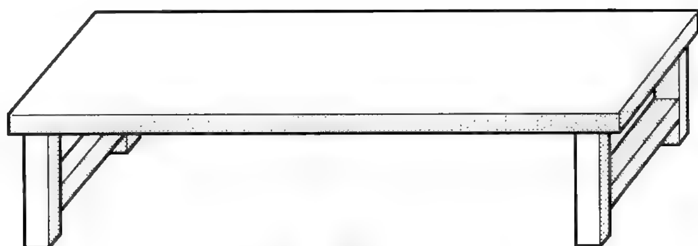

怎么啦！
气氛这么沉重!!
这家伙从刚开始就一直是这副样子。


使劲地
今天的课一结束就要开始做书架了……
一想到那个书架的设计，
NONO……
NONO 就开始烦恼了，
我有压力啊!!


NONO还是第一次感觉到这种压力!!!
哇啊


哎呀。我只要一个极其普通的书架就可以啦!
好了好了，或许你在学习过程中会产生好的构思。


今天让我们以长凳为例来思考一下实际所需要的板材的厚度。


长凳


哦，这是实用性的东西，好像对DIY也有用。


噢!
好像只要能理解今天的学习内容，就能够知道最适合书架隔板的厚度。

1 为了制造出不易损坏的结构体

在损坏之前要明白（制造不易损坏结构体的步骤）

首先来复习一下之前所学过的东西。如何能制造出不易损坏的结构体？

我来回答！我已经清楚地想起来了！

只要产生的应力＜材料的强度就可以了。

没错！要制造出不易损坏的结构体，需要如下几个步骤。

步骤① 在各种条件下推测会作用于结构的力



步骤② 求出结构对此力所产生的应力为多少



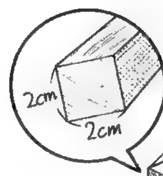
步骤③ 比较产生的应力与材料的强度

（如果产生的应力＜材料的强度，则可以判断结构不会损坏）

原来如此，在设计图阶段一定要事先认真地确认这些步骤吧？

没错！
并且如果知道了构件的尺寸和材料的强度，就能够比较清楚地预料构件“能够承受多大的力”。

例如，让我们来探讨一下截面为 2cm×2cm、长度为 1m 的木材杆件。假设该木材的强度为 100MPa。



1m

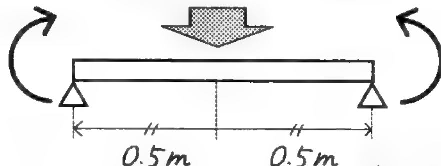
坚固木材的拉伸强度为 100MPa 左右。

从结论上来看，这根木材在拉伸变形中能够承受 40000N（约 4tf）的外力，但是在弯曲变形中只能承受 533N（约 53kgf）的外力。（关于计算方法，将会在下一页中说明）。

<拉伸变形>



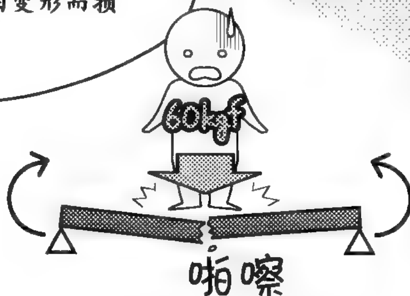
<弯曲变形>



哇啊！

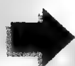
竟然相差 70 多倍！

嗯，也就是说当体重为 60kg 的人站在这根木材杆件上时，杆件就会因为弯曲变形而损坏。



在杆件损坏之前通过计算就能够明白。

正是如此！只要活学我们之前学过的内容，就能够像现在这样得出具体的数值。



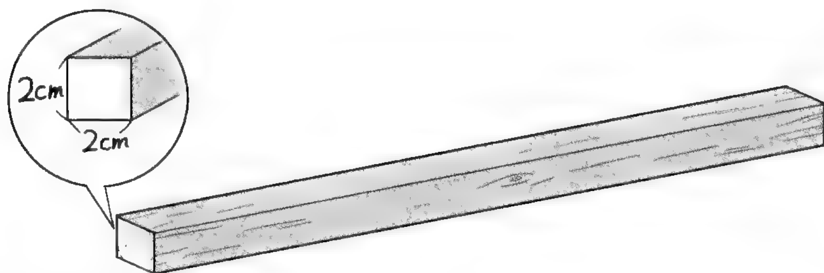
截面为正方形的杆件的应力



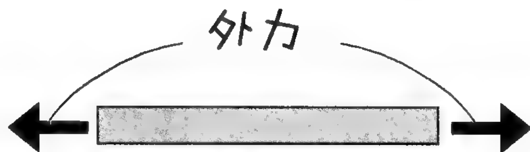
刚才尾濑会长说出了具体的数值，**"这根木材在拉伸变形中能够承受 40000N 的外力，但是在弯曲变形中只能承受 533N 的外力"**。

好像这个计算与截面形状有很大关系。在上次课中（P157），我们曾学过截面为长方形的杆件的弯曲变形。如果理解了上次课的内容，这个就很简单了！

在此我们将会计算一下下图中的木材杆件在受到**拉伸变形**和**弯曲变形**时的应力等。



假设这根木材杆件的截面为 2cm×2cm，木材的强度为 100MPa。
首先让我们来看一下**拉伸变形**。
当我们像下图那样拉伸这根杆件时，杆件能够承受多大的力呢？

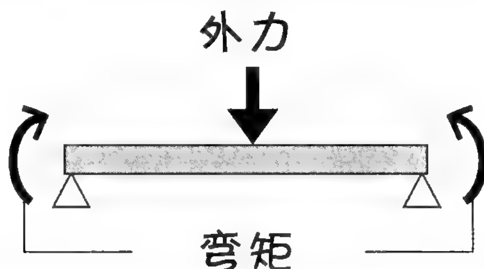


截面积为 $0.02\text{m}\times0.02\text{m}=0.0004\text{m}^2$。
通过材料强度 × 截面积可以得出整个截面的强度为 $100\text{MPa}\times0.0004\text{m}^2=40000\text{N}$。
也就是说能够承受约 4tf 的外力。我们知道这可是能够承受相当大的力哦。

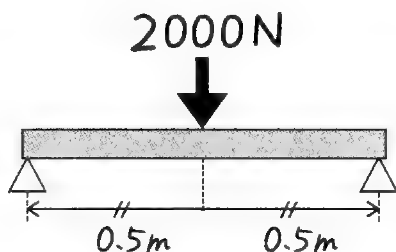




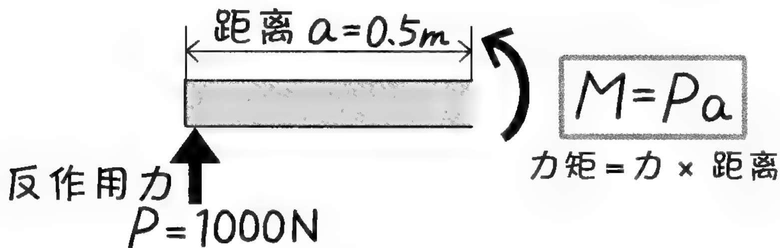
那么接着让我们来思考一下下图所示的弯曲变形时的情况。



这个计算有些复杂。首先让我们来考虑一下作用于杆件正中间的外力为 2000N 时的情况。支点间的距离为 1m。



那么如下图所示，**反作用力**为外力的一半 1000N。因此在杆件正中间所产生的**弯矩**为 1000N×0.5m=500N · m。



在杆件上所产生的弯矩的状况

嗯，**力矩**我们已经懂了……
不过我们现在想知道的是**应力**。呜呜……





在此希望你们回忆一下弯曲应力的公式（参考 P163）！
如果有了这个公式，就能够根据力矩计算出应力哟。

$$\sigma = \frac{M_B}{I} y$$	弯曲应力 = $\dfrac{\text{弯矩} \times \text{到中立面的距离}}{\text{截面惯性矩}}$

哦！确实有这样的公式。太好了，好像只要有了这个公式，
就能够求出应力。





不过，在此希望你们注意两点。

① 截面惯性矩 I 根据截面形状的不同而不同。

② 要求出最大弯曲应力，就要假设距离 y 为"（杆件的）高的一半※"。

如果记住了上次课所讲的内容，就应该会明白这个意思……怎么样？

※ 正确地讲，是指"从中立面到最远点的距离"

关于第⑴点，NONO 已经明白了！
这次的杆件的截面形状为 2cm × 2cm 的正方形。因为正方形也是长方形的一种，所以可以像上次课所讲的长方形杆件的问题那样求出 I。



关于第⑵点，我也明白了。
要制造出不易损坏的东西，就要求出**"最大弯曲应力"**。**当 y 取最大值时，**其所对应的应力为最大弯曲应力。因为这次的截面为四边形，所以当 y 取最大值时，正好是"（杆件的）高的一半"。





没错！如果你们明白了这些，就没问题了哟。
另外**力矩的单位是 N·m，截面惯性矩的单位是 m^4**。让我们一边注意单位，一边继续下面的内容。

另外，力矩为 500N · m

因为杆件的高为 2cm，所以它的“高的一半”为 1cm，将它的单位转换成 m 的话，就是 0.01m

当杆件截面为长方形时的 I 值，我们在第 5 章中曾经计算过。

截面形状	截面惯性矩
（长方形截面，宽 b，高 h）	$\frac{bh^3}{12}$

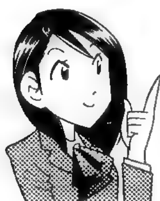
可以参考附录（P217）中的截面惯性矩表。

I 值为（0.02m）^{4}/12 = 0.000000013m^4=1.33×$10^{-8}m^4$。那么让我们把这些值代入下述公式中计算一下。

$$\sigma = \frac{M_B}{I} \times \text{高的一半}$$

计算结果为**应力（最大弯曲应力）**等于 375MPa。

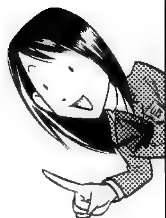
这个值远远超过木材的强度 100MPa，也就是说在 2000N 外力作用下，杆件就会因弯曲变形而损坏。



只要记住这些步骤，求出最大应力，将它与材料强度比较一下，就能够得知构件是否会损坏。

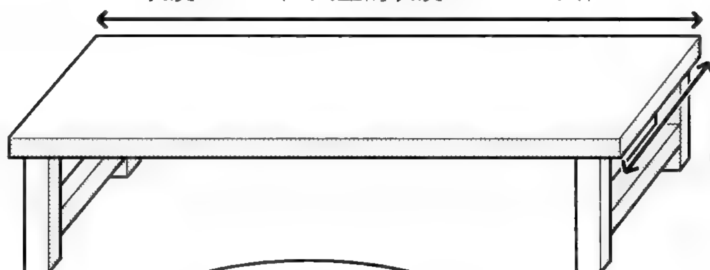
如果将计算反过来的话，就能够知道“构件能够承受多大的力”。

跳跃、打闹!?（冲击力）



那么让我们以长凳为例来探讨一下！

例如，4个人坐的长凳，假设它的长度和宽度是这样，木材的强度与刚才一样为100MPa。

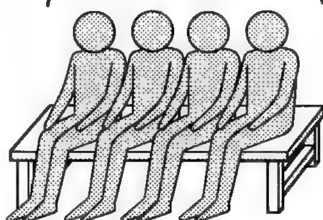




要使长凳不损坏，就要确定它的厚度吧！

那么西本请你考虑一下施加在这个长凳的木板上的重量。

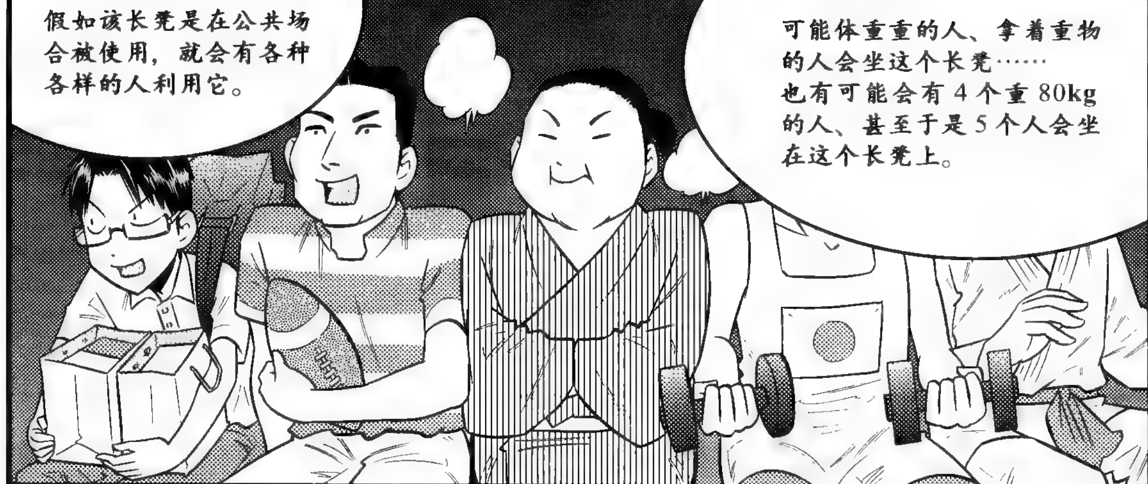
嗯，假设每个人的重量为60kgf，那么施加在木板上的重量就是60kgf×4人=240kgf，是吧？



单纯地考虑的话，就是那样。

不过实际上我们还必须考虑很多方面。





那样的话，就要使长凳在承受最大 80kgf×5人=400kgf的重量时也会很结实就可以了！

也就是说施加在长凳上的力为400kgf……

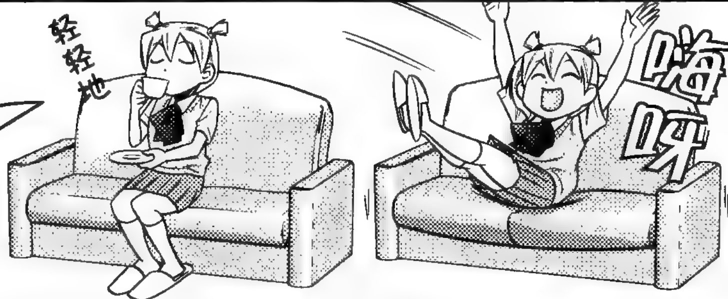
现在就下结论为时尚早。让我们再来想象一下吧！



如果做这样的运动的话，在瞬间会因为冲击对长凳施加很大的力，这个力被称为冲击力。

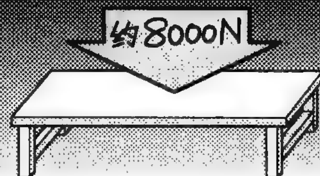
冲击力会因状况不同而不同，不过它是轻轻地坐下时对长凳施加的力的好几倍。

确实“轻轻地坐到沙发上时”和“猛地坐到沙发上时”，沙发的凹陷程度不一样。



好了，因为不能认为所有的人都会在上面跳跃，所以就以静力的两倍来考虑吧。

那样的话，施加在长凳上的力为 800kgf，约为 8000N。

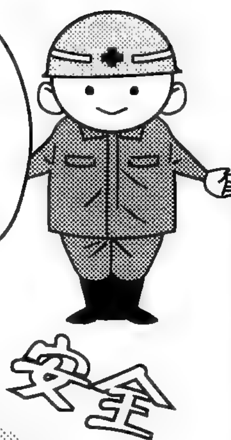


如果单纯地考虑 4 个人的重量的话，就只有 240kgf……
没想到相差这么大。



不过考虑到 800kgf 更安全哦，即使是 5 个人坐上去也不会出问题，即使在上面跳跃也不会坏！

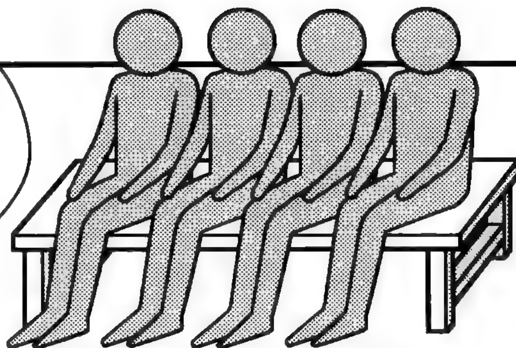
没错哦。
这样在大致估计作用力和实际发生的应力时，就会得出“安全的结果”。



原来如此，那么如果知道了作用力后，接着就可以计算应力，求出所需要木板厚度吧？



没错！计算方法我稍后再做解释，如果先说结论的话……

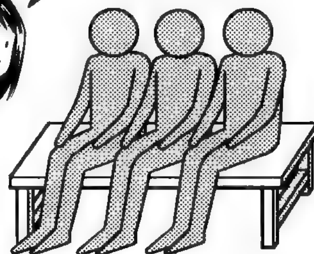

在4人长凳的场合，如果外力为8000N，那么需要2.7cm厚的木板。
2.7cm



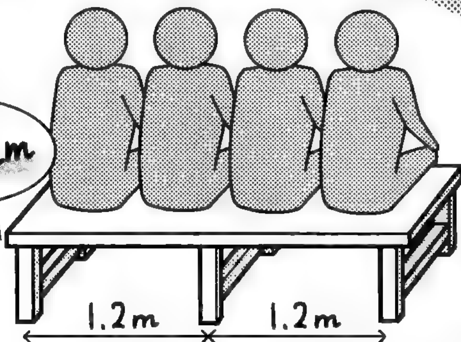

哦！非常具体！即使去买木板也会有明确的目标了！

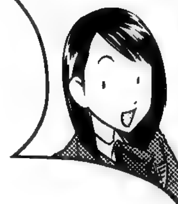

当然，这个必要厚度会根据条件发生变化。


如果不是4人长凳而是3人长凳，那么外力和长凳的长度就会变小，那么木板的厚度只要2.1cm就可以了。


2.1cm


还是4人长凳，如果在它的正中间增加一个支撑脚，那么木板的必要厚度也会变化，大概1.8cm就可以了！


1.8cm
1.2m
1.2m


噢，如果厚板的价格高的话，买一块薄点的木板，增加一个脚就可以了。


如果能这样计算，在DIY时就会巧妙地设计，避免浪费材料。
那么，接着我将会说明一下这个计算方法！

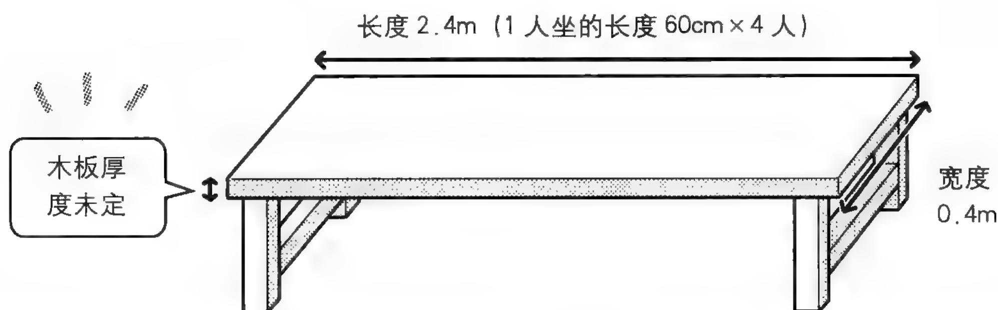
长凳木板厚度的计算



下面是关于长凳木板厚度的计算。在这里截面惯性矩 ***I*** 还是很重要。提起截面惯性矩，就会想到截面形状。

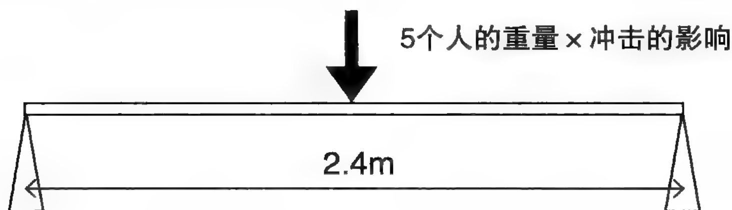
必须要注意长凳“座位部分的木板”的**截面形状**。

那么，让我们来计算一下长凳木板的厚度。假设木板的强度为 100MPa。



关于4人长凳的问题

首先，试着考虑一下如下图所示的 4 人长凳的相关情况。



通过（最大 80kgf×5 人 =400kgf）× 冲击力 2 倍这一计算可以得出施加在 4 人长凳上的外力为 800kgf= 约 8000N。

因为要准确地计算力矩很难，所以让我们简单地认为它与刚才所讲的**木材杆件弯曲变形**情况一样。

也就是认为力集中地作用于杆件的正中间。

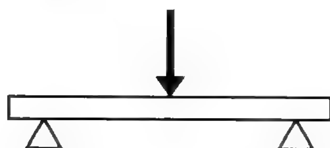
当力集中地作用于杆件正中间时，在杆件两侧会分别产生相当于作用力一半的**反作用力**，即反作用力 =8000N/2=4000N，而力臂的长为 2.4m/2=1.2m，让我们来大致地计算一下力矩。

计算结果为**力矩** =4000N×1.2m=4800N · m。

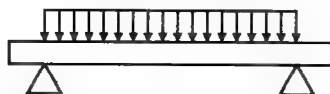
如果这样计算的话，就能够得出比实际情况要大的弯矩。



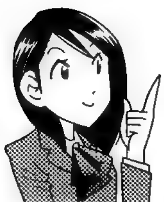
外力（载荷）的作用方式有几种。例如，当**外力集中于 1 点**时的**集中载荷，外力等量分布于整个物体上**的**等分布载荷**。



集中载荷



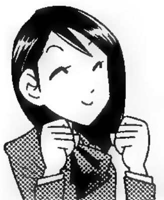
等分布载荷



关于长凳问题，我们都视为**集中载荷**。因为如果看成集中载荷来考虑的话，不仅计算简单，而且能够得出比实际情况更大的力矩，所以这个结果为更加“安全的结果”。

如果是集中载荷，此时的计算就与刚才的杆件弯曲变形时的计算一样。知道力矩后，把它代入应力公式中就可以了吧。





没错！只是要注意**截面形状**。并且因为这次要求的是**木板厚度**，所以要**解出关于木板厚度的公式**。

在此让我们来探讨一下**截面形状**。

截面形状	截面惯性矩
（矩形，宽 b，高 h）	$\dfrac{bh^3}{12}$

< 长凳木板的截面 >



看一下上面的图就能够明白长凳的木板截面为长方形，

所以**截面惯性矩 I=（长凳宽度 b）×（木板厚度 h）^{3}/12**。

接着让我们来列出“**应力（最大弯曲应力）< 木材强度**”的公式。利用**弯曲应力公式**，可以得到如下公式。

当这个公式成立时，长凳才不会损坏。

$$\sigma = \frac{\text{力矩}}{\text{截面惯性矩}} \times \text{高的一半} < \text{木材强度} \qquad ①$$



嗯。确实是这样。列出使用了 < 的不等式很关键。

如果将截面惯性矩 I=（长凳宽度 b）×（木板厚度 h）^{3}/12 **代入公式①中求解木板厚度**，就能够得出如下公式。

$$\text{木板厚度}\ h > \sqrt{\frac{6 \times \text{力矩}}{\text{长凳宽度} \times \text{木材强度}}} \qquad ②$$



到了这里，后面就很简单了！只要将具体的数值代入公式②中，就能够知道木板的厚度。在根号计算中要使用**函数电子计算器。**并且在以后**计算别的长凳问题时也可以使用这个公式②。**

那么，让我们把相关数值代入该公式中计算一下吧。

力矩 =4800N · m、长凳宽度 =0.4m、木材强度 =100MPa。100MPa 的 M(兆) 为 10^6。也就是说，100MPa=100×10^6Pa=100×10^6N/m^2。在计算时单位非常重要。

计算结果如下。

$$h > \sqrt{\frac{6\times\text{力矩}}{\text{长凳宽度}\times\text{木材强度}}} = \sqrt{\frac{6\times4800}{0.4\times100\times10^6}} = 0.0268\,(\text{m})$$

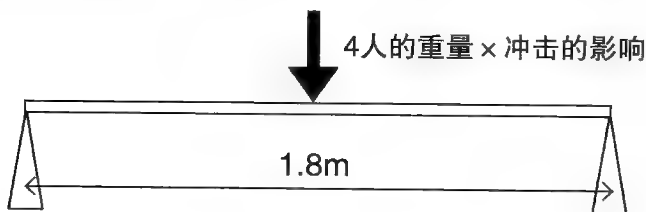
由此可以得出：如果长凳的木板厚度大于 2.68cm，长凳就不会损坏。

太好了！具体的值出来了！
因此，如果木板厚度为 2.7cm 的话，长凳就不会损坏！



关于3人长凳的问题

那么接着让我们来看看有关3人长凳的问题。



长度为60cm×3人=1.8m。

通过(最大80kgf×4人=320kgf)×冲击力2倍这一计算可以得出施加在3人长凳上的**外力**为640kgf≈6400N。

根据**反作用力**3200N×力臂长0.9m可以得到**力矩**为2880N·m。

知道了力矩。这样就可以使用刚才的公式②。



那么让我们把相关数值代入公式②中计算一下!

力矩=2880N·m、长凳宽度=0.4m、木材强度=100MPa。

$$h > \sqrt{\frac{6 \times \text{力矩}}{\text{长凳宽度} \times \text{木材强度}}} = \sqrt{\frac{6 \times 2880}{0.4 \times 100 \times 10^6}} = 0.0208\,(\text{m})$$

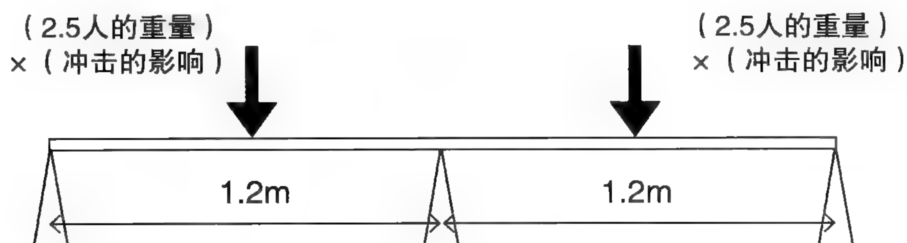
由此可以得出:如果长凳的木板厚度大于2.1cm,长凳就不会损坏。

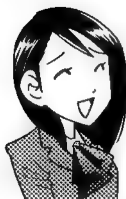
嗯。即使是3人长凳也需要2.1cm厚的木板啊。



当给4人长凳加支撑脚时

那么最后让我们来考虑一下4人长凳有3个支撑脚时的情况。也就是在长凳正中间增加一个支撑脚（支点），力的作用方式如下图所示。



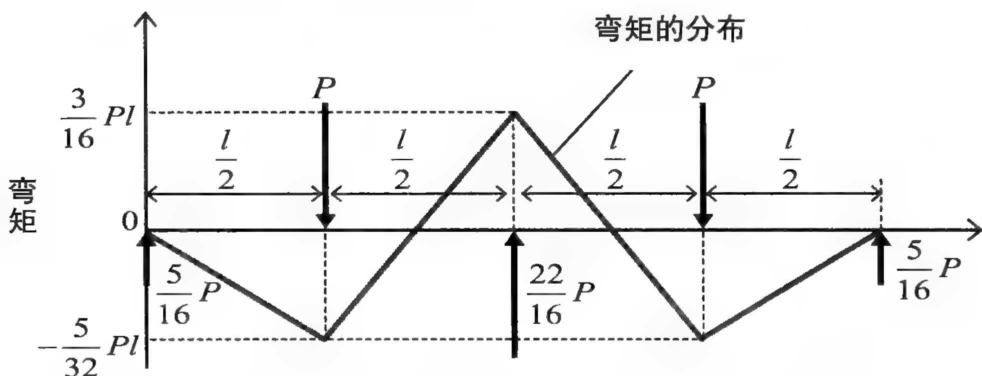


乍一看似乎很简单，但实际上像这种有3个或3个以上支点的梁（受到弯曲变形的构件）的计算比较复杂。

它是一个不仅要求力平衡，还需要考虑变形的“超静定”问题。

在此为了使计算变得简单，首先假设该问题为**力集中作用于各梁的正中间**的左右对称问题，然后再来求解该问题（该计算如附录P218所示）。

于是，这个长凳的**弯矩分布**和**各支点的反作用力**如下图所示。



CHECK!

向下弯曲的力矩作用于左右两个载荷点，向上弯曲的力矩作用于正中间的支点。

力矩的**正负**表示它**是向上弯曲还是向下弯曲。**

当然无论是向上弯曲还是向下弯曲，如果超过了限度，构件都会损坏。

要判断构件是否会损坏，力矩的**绝对值**很重要。

这种情况下，可以得出这样的公式：**在左右两个载荷点**，力矩 M=5/32× 外力 P× 支点间的距离 l；在正中间的支点处，力矩 M=3/16× 外力 P× 支点间的距离 l。

因为 5/32(=0.15625) < 3/16(=0.1875)，所以在正中间的支点处产生的力矩为最大力矩。让我们来求这个力矩。

之前长凳向下弯曲只能想象成凹陷。
但是现在有 3 个支点，在正中间的支点处会产生向上弯曲的凸出状力矩啊……

即便如此，总觉得上面公式中的分数很复杂。





我们将具有三个或三个以上支点的梁叫做**“连续梁”**。关于连续梁的计算有点复杂哦。
求力矩的公式中出现的数字 3/16 和 5/32 是考虑这次连续梁的情况时所得出的数字。

这次让我们把外力加大，假设为 6 个人的重量吧。那么通过（最大 80kgf ×6 人 =480kgf）× 冲击力 2 倍这一计算可以得出外力为 960kgf ≈ 9600N。

因为支点间的梁的长度为 1.2m，所以要求的力矩（在正中间的支点处产生的力矩）为如下结果。

$$M=\frac{3}{16}\times 9600\times 1.2=2160\ (\mathrm{N\cdot m})$$

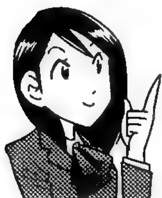
我们知道了力矩！这样就可以使用刚才讲过的公式②。



那么让我们把相关数值代入该公式中计算一下吧。
力矩 =2160N · m、长凳宽度 =0.4m、木材强度 =100MPa。

$$h > \sqrt{\frac{6 \times \text{力矩}}{\text{长凳宽度} \times \text{木材强度}}} = \sqrt{\frac{6 \times 2160}{0.4 \times 100 \times 10^{6}}} = 0.018\,(\mathrm{m})$$

由此可以得出：如果长凳的木板厚度大于 1.8cm 的话，长凳就不会损坏。
只要在长凳正中间放置支撑脚（支点），座位的木板即使薄一点也没有关系。



在此长凳问题就结束了。只要记住这次学的计算方法，对制作书架也会很有用吧？

嗯！在书架问题上，只要将人的重量换成“书的重量”、将长凳的木板换成“书架的木板”来考虑就可以了。不仅仅是书架，好像对桌子、电视柜等各种东西的 DIY 都有用！



嗯。到此又解决了一个问题。
真是辛苦了。





喂喂。再稍等一下！今天的课稍后还要继续哦！

2 不易变形也很重要

何谓刚度?（刚度）

另外，在制作结构体时，不仅要考虑到它不会损坏，构件不易变形也很重要。

确实我很讨厌坐上去就会弯曲变形的长凳。

呵呵，是啊。

不过在精密机械的构件中，变形所产生的影响会更严重哦!

如果构件变形的话，机械的操作性能就会降低。

呜呜，这确实是个大问题。要尽量利用难以变形的材料……杨氏模量大的材料来制作吧!

嗯。不过在难以变形中，虽然材料的弹性模量很重要，但是结构或构件的形状和尺寸也很重要。

例如，即使是硬的金属，但如果像铁丝那样细的话也很容易变形。

另外，虽然椅子的腿是木材，但是因为它很粗，所以不会轻易地弯曲。

我们将物体抵抗变形的能力叫做刚度。

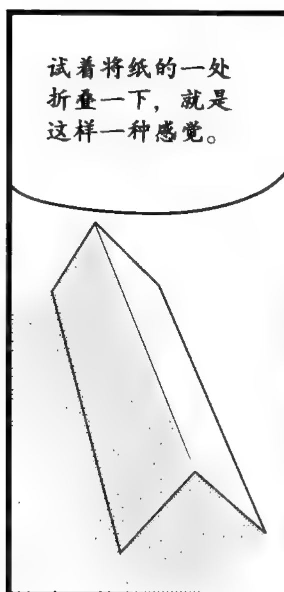
在制造构件时，要尽可能地选择轻而且刚度大的形状。

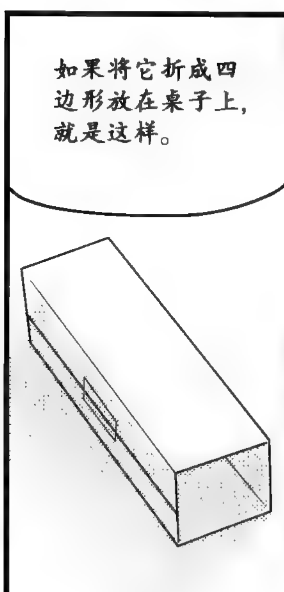
刚度


例如，让我们来思考一下如何使1张复印纸的刚度变大。
咦??
有那样的形状吗?

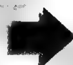

如果是1张纸，它会因为重力而下垂。我们将物体自身的重力叫做“自重”。
柔软


不是那么回事哟。
如果我们将纸稍微加工一下，结果会如何呢?
这张纸会输给自重发生变形，真是不结实啊。果然材料为纸的东西还是不行啊，看起来就很单薄……


试着将纸的一处折叠一下，就是这样一种感觉。


如果将它折成四边形放在桌子上，就是这样。

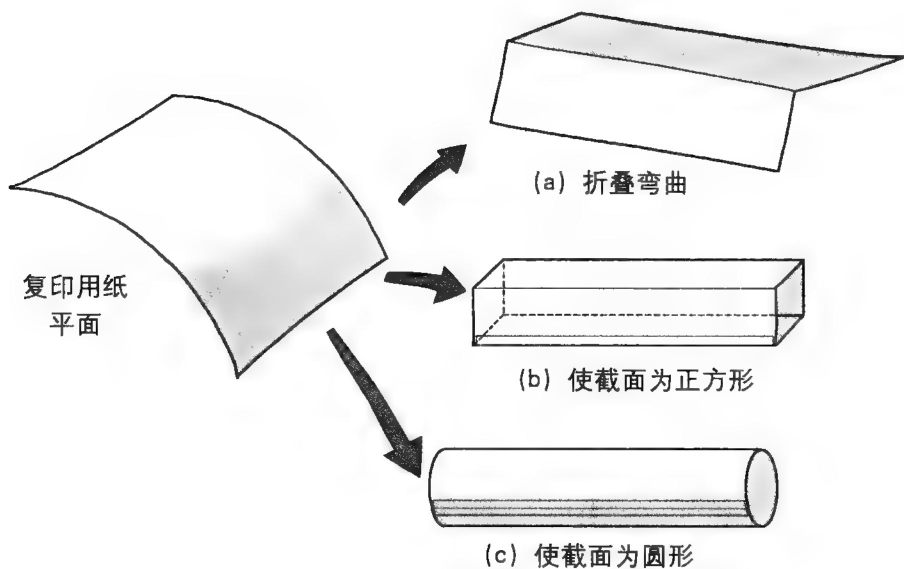

好像变结实了。
哦!
形状发生了变化!
即使材料相同，但是只要想办法将它加工一下，它就变得难以变形了。



想办法使材料更结实（屈曲）



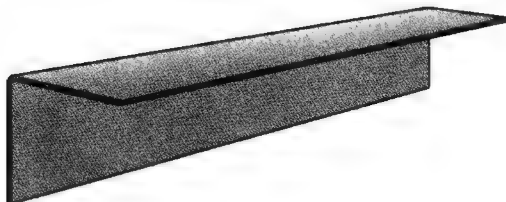
另外，我再来稍微详细地说明一下刚才所提到的关于改变形状的问题。例如，假设我们试着做出了如下三种形状。



用纸做成的各种形状



首先请看折叠而成的图（a）的形状。如果是这个形状，就不会输给重力，能够保持水平。这种形状的构件被称为角材，在实际的结构体中经常被使用。

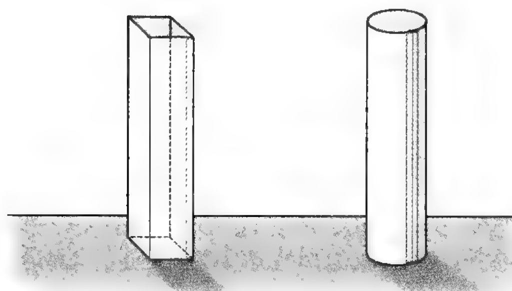




噢。确实我觉得在好多地方都见过这种形状的构件。



并且图（a）、（b）、（c）的形状都能够立起来。特别是图（b）、（c）中的四方体筒状和圆筒状构件能够承受超过自重的重量。





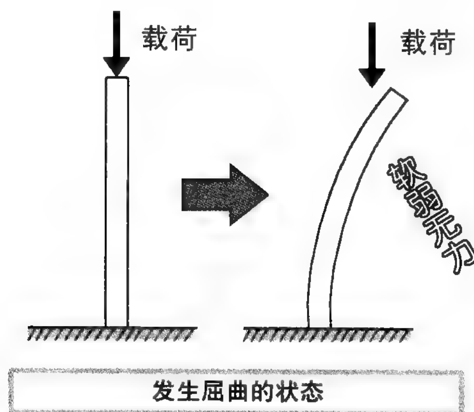
哦，确实变成筒状后，好像就能够承载有点重的东西。这与刚开始软绵绵的纸张完全不一样哦。



没错。折叠前的复印用纸软绵绵的，很容易弯曲，要使它立起来几乎是不可能的吧？

我们将这种现象叫做**“屈曲”**，它是指给构件施加一定的压力，构件虽不想弯曲但还是弯曲了的现象，也就是指结构丧失稳定性。

细的构件和薄的构件即使受到的作用力（**压缩力**）很小也会轻易地弯曲哦。



发生屈曲的状态



但是，如果像图（b）、（c）那样想办法改变构件的形状，构件就会变得难以弯曲，它的屈曲载荷就会变得比原先大很多。



原来如此。好办法还是很多的。



我们将结构或构件**变得难以弯曲**叫做**“弯曲刚度增大”**。**“弯曲刚度 = 杨氏模量 × 截面惯性矩”**，这之前讲过吧（参考 P161）？

也就是说，即使纸的杨氏模量不变，通过改变构件的截面形状，也能使构件的弯曲刚度增大。

另外，如果要计算出截面惯性矩 I 的具体值，就是如下所示这样。

宽度为 a、厚度为 t 的纸 → $I = \dfrac{at^3}{12}$

正方形

$a/4$

$$I_{\square} \approx \frac{a^3 t}{96}$$

圆形

$a/2\pi$

$$I_{\bigcirc} \approx \frac{a^3 t}{8\pi^2} \approx \frac{a^3 t}{80}$$

若纸的厚度与宽度之比为 t/a=100，当纸构件的截面为正方形时，其弯曲刚度为原来的 1250 倍；当纸构件的截面为圆形时，其弯曲刚度为原来的 1500 倍。



哇啊！

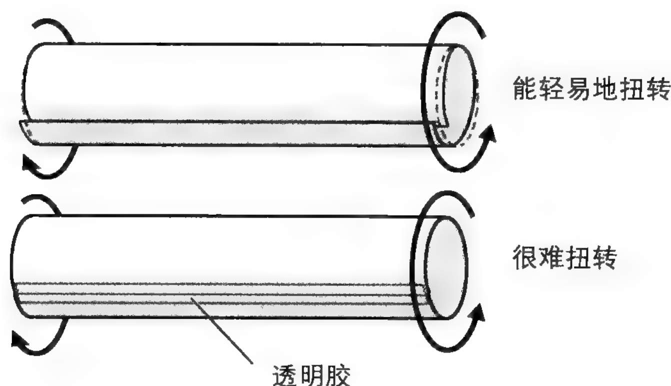
竟然发生了 1000 倍以上的变化，太厉害了！



嗯，关于弯曲刚度我明白了。
那么在除了**弯曲变形**以外的其他变形中，又是什么状况呢？
例如，对于**扭转变形**呢？



你们可要认真地听好哦！可以**使扭转刚度增大**哟。
比较一下下图中的两种状况就能够明白。
一个图只是圆筒状的纸。试着用透明胶将另外一个图的边上固定起来。



卷成圆筒状的纸的扭转



啊，试着扭转它们……没有用胶带固定住的那个圆筒能轻易地扭转。而那个用胶带固定住的圆筒就完全不同！

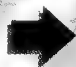


嗯。如果把刚才讲过的内容都总结一下的话……
就可以说**"即使是相同的材料，通过改变它的形状也可以使它的刚度增大"**，对吧？
当然，不仅是纸，像铁板等其他材料也是如此吧？

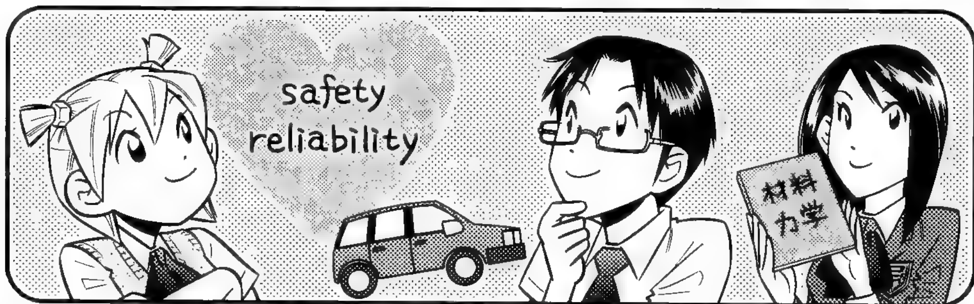


没错！
另外，因为我们希望高尔夫球杆和钓鱼竿具有适度的柔韧性，所以此时需要**控制它们的刚度**。
总之我们要好好地考虑材料的用途，根据它的用途来确定最适合它的形状。

3　结构体在什么情况下是安全的



要考虑不确定性（安全系数）





在所有课即将结束之时，我将要讲解一下有关结构或构件“**安全性和可靠性**”的知识。
材料力学的最大任务就是要制作出“在应用过程中不会损坏的结构体”。
这就是要确保机械、工具、结构体的可靠性。
结构体在使用状态中会承受各种载荷，必须要使它在承受载荷的状态下不被破坏而发挥它正常的功能。



嗯。如果交通工具或建筑物坏掉的话，就会危及到生命安全。这与保护利用者的安全密切相关哦。确实是个重要的话题！



在考虑结构体安全问题时不可缺少的就是“**许用应力**”(又名容许应力，allowable stress)。所谓**许用应力是指材料在实际使用时被认为不会破坏、处于安全状态而允许它能承受的最大应力。**

“如果在这个应力范围之内构件就不会破坏！ OK！”也就是被允许的应力值吧？



……嗯？？但是之前我们学过“强度”。
如果产生的应力小于构件的材料强度，构件不是也不会损坏吗？
许用应力和强度有何不同呢？



确实在计算上如果产生的应力小于材料强度，构件就不会损坏。
但是，**当结构体被实际使用时**，我们会考虑到各种**不安全因素**、**不确定性**吧？



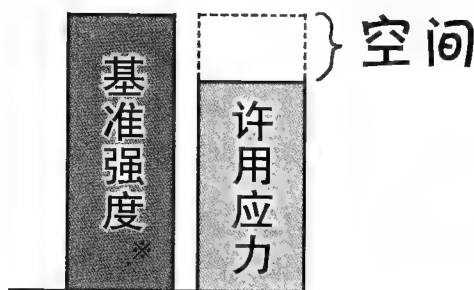
例如，本来是打算制作完全一样的东西，结果做出来的东西却不一样，就像在讨论长凳问题时所考虑的**冲击力**那样，有时我们很难正确地推定出它到底为多少。

并且还有像疲劳、腐蚀之类的问题，即“受使用环境影响而导致材料恶化的问题”也是很难的课题。



原来如此。**在设计阶段要考虑到各种情况**，这一点很重要。

也就是说，**许用应力与强度相比，必须留出一定的空间（即许用应力必须小于强度）**。



※ **基准强度**是指计算时作为基准的强度。

在塑性材料中把屈服应力（发生塑性变形时的应力）作为基准强度，在脆性材料中把强度（极限应力）作为基准强度。



没错！并且把**强度与许用应力之比**叫做**安全系数**。

安全系数表示**留有多少空间**。

$$安全系数 = \frac{材料的基准强度}{许用应力}$$



与用到极限相比，最好还是尽可能地留出一定的空间。

我也想制作出一个安全系数较大的书架。



如果安全系数太大的话，制作出的结构体就会有一部分被浪费或者材料费会很高，所以关键是要掌握平衡度。



不过，还有一点我想知道……

刚才你提到的各种**不安全因素、不确定性**除了冲击力以外，还包括哪些？



这个问题提得很好。或许会有点难，不过在考虑以下**各种不确定因素之后才能**决定安全系数的大小。

这些并不是分别影响安全系数的因素，它们有可能会相互关联而引发事故。

1. 使用材料的强度分布不均

因为材料表面所看不见的伤痕或各种缺陷导致材料破损，此时是由所使用的材料的强度分布不均引起的。

2. 腐蚀、疲劳等原因

有时材料经过多年使用会受到风吹雨打和各种环境的影响而腐蚀，有时在力反复地作用下材料会疲劳，在这样的情况下材料的强度会降低。

3. 载荷估计不正确

虽然结构体是在考虑到最严峻的状况后设计出来的，但是因为外力（载荷）的估计是人为的，所以可能会出现一些被忽略掉的因素或一些超出想象的恶劣条件。

4. 应力计算结果不确定

应力计算是通过把实际的结构“数学化或力学模式化”之后再给出答案。一般在应力计算时都会很严格，可即便如此，也有可能会积累误差。

5. 非连续部位的应力集中

当在结构体中有螺丝钉孔时，或者当它的形状发生急剧变化时，在结构体的局部会产生很大的应力（这叫做应力集中）。但是我们很难正确地计算出它对结构体强度的影响。

6. 制作不准确

在实际制作结构体时，并不能像设计图那样正确地切割和焊接，多少会产生些许误差。有时当误差积累过多时就会引发故障。

7. 其他因素（结构体损坏时对社会和人的影响）

当关系到人命的场合，基本上安全系数就会增大。

例如，建筑基准法规定“电梯缆绳的安全系数要在 10 以上”。



哇啊！这么多不安全因素！！真令人头疼！呜呜……



确实很令人头疼。另外，因为“我们不知道到底安全系数为多少才算安全”，所以现在有一部分人强调**“要从概率的角度来考虑安全性，并以此来代替安全系数制作设计基准”**。



从概率的角度来考虑安全性？这是什么意思？



例如，在考虑汽车时，就会想到粗鲁地开车的人和不会粗鲁地开车的人在使用汽车期间，它们的汽车所经受的最大力不同。

为此，各个产品（汽车）的强度都会有差别，要综合地考虑这些因素来确定**故障概率**。

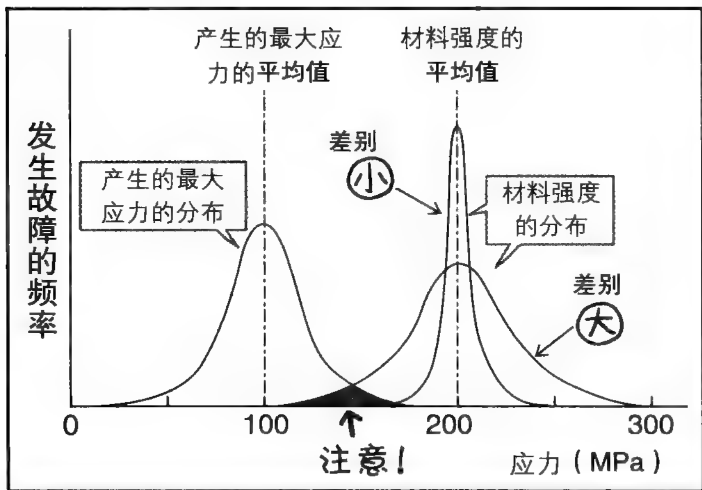


嗯……也就是说，当粗鲁地开车的人与质量稍差的汽车这样的不安全因素重合在一起时，故障概率就会提高，对吧？



正是如此！如下图所示，请看“材料强度”分布和“产生的应力”分布**重叠部分的面积**，故障概率正好与此部分面积相对应。

从此图中我们可以得知：**虽然有平均强度，但如果材料强度的差别越大，那么全部产品的故障概率就越大**。



强度的分布与产生的应力的分布

CHECK！

当“材料强度的分布”差别小时，只与“产生的最大应力的分布”有一小部分重合。

但是，当“材料强度的分布”差别大时，会与“产生的最大应力的分布”有很大部分重合。

这样，发生故障的频率就会变高。



嗯，也就是说，从“质量好的汽车”到“质量差的汽车”，如果产品强度有这样的差别，**“粗鲁开车的人”遇到“质量差的汽车”的概率就会变大**，这种组合就是不安全因素重合，是最坏的组合，很容易引发故障。



嗯。因此只有使这样的故障概率达到最小的设计和制造才是合理的。产品的差别越少越好。



呵呵。我明白了。这样的话，为了安全就要考虑各种因素。



没错哦。安全系数只不过是一个**“留有多少应力空间”**的标准，并不是说因为安全系数高所以结构体绝对不会损坏。
是不可能有绝对的哦。
但是，**为了提高结构体的安全性，制作出不易损坏的结构或构件，就需要材料力学这门学问。**



嗯。
感觉这好像是最后一节课的总结。

实际上在设计结构时都会考虑各种预想因素。

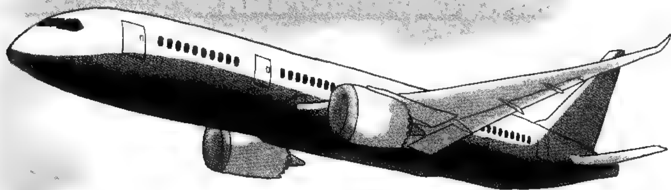
很多故障和事故的原因都是人为错误所引起的，在向新技术挑战时，会出现一些技术者不知道的原因，从而引发意想不到的事故。

事故往往都会伴随着各种悲剧。但是，只有通过总结事故和失败的经验并吸取教训，技术才能够进步。

例如，在设计飞机时，会吸取大事故的教训，采用**“损伤容限设计”（damage tolerance design）**这一设计理念。飞机每飞行几次，就要对其进行严格的检修。损伤容限设计的基本出发点是**承认结构中存在着未被发现的最坏的缺陷，并且即使在这种状态下结构依然能承受住我们所预想的载荷**。这一设计的目的就是通过与检修结合**将事故防范于未然**。

并且当发生由可预见状况（如雷击、与飞鸟相撞等）所引起的破损时，或者在海上一个引擎出现故障时，飞机都必须返回机场……由此就要制定出应对各种安全的必要条件。

只有满足这些必要条件之后才能许可飞行。这些准则都是在理解了材料和结构的基础上所设定的。



当然，要开发产品就必须满足这些必要条件。不过对于真正的技术者而言所要求的不只是满足必要条件，还要求他们“**一边思考作为准则基础的安全要求的本质意义，一边进行结构设计**”。

最好在学习的时候也试着思考一下安全要求的本质意义。


啊，结束了，
结束了！
辛苦了！
你们两人都很
努力哦！


……
……咦？
NONO 不回家吗？


嗯，
我想一个人思考一下。
什么样的书
架适合这间
屋子？


噢……
我知道了。不过，
不要太晚了哦！


嗯，
嗯……


哎呀!!
不行!


还是不行……
这时最好打开窗户深呼吸一下……


呼——
沙沙




打开
啊,这是什么……
辞职信……

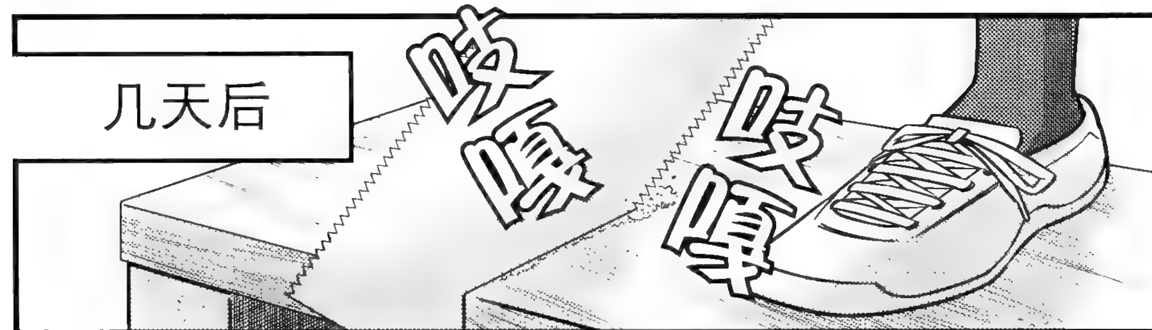


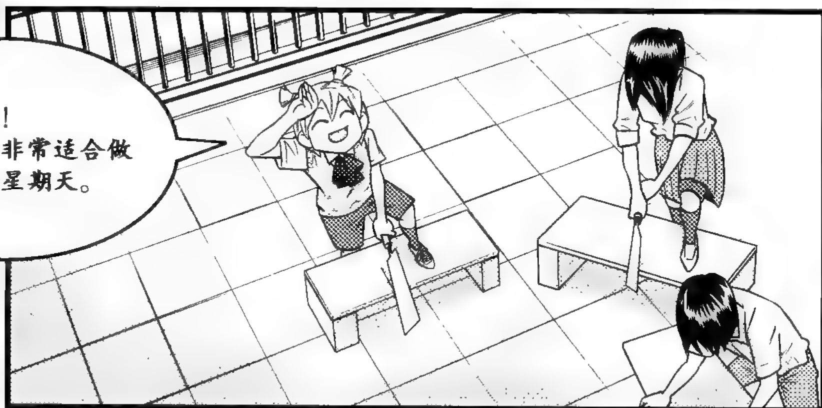
好，想出来了！
这是瞬间的灵感。

咝……

咝……

咝……




天气很好！
真是一个非常适合做木工活的星期天。


好困……好累……为什么这么惨啊……
请你再加把劲儿！


哎呀！我本来就是学文科的。虽然通过这次的学习也开始对理科感兴趣了……
但是，我绝不会加入体育系！


我是一个崇尚书本至上的人，并不想干这种事情！
你在嘀咕什么呢……
好，
最后的加工交给我NONO就可以了


请你们俩在活动室里等着！

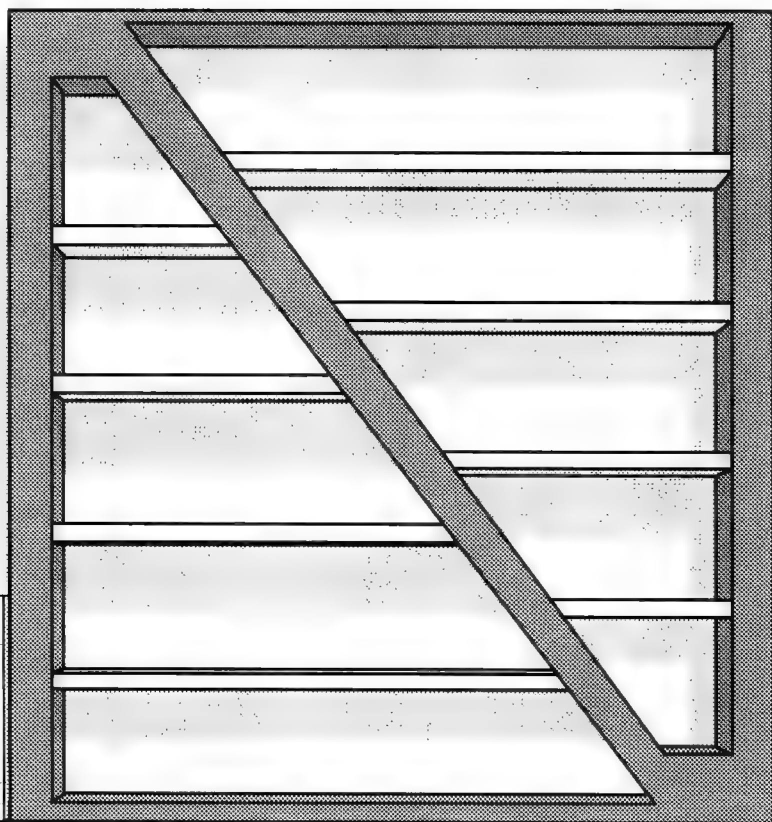
……那么，到底最后是什么样的设计呢？

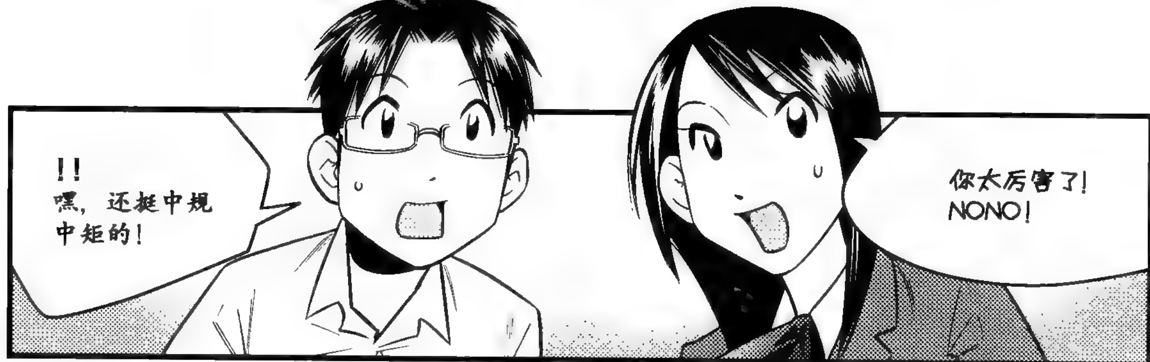
让你们久等了。

请看！

突然掀开

这就是 NONO 制作的“共用书架”！







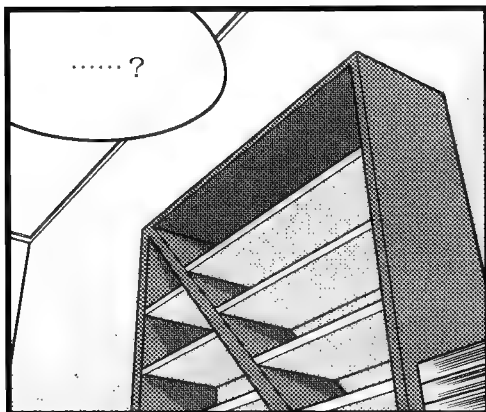
嗨！
请看 NONO 的草图！

家里人！恋人！
共用书架
哥哥
弟弟
Nono

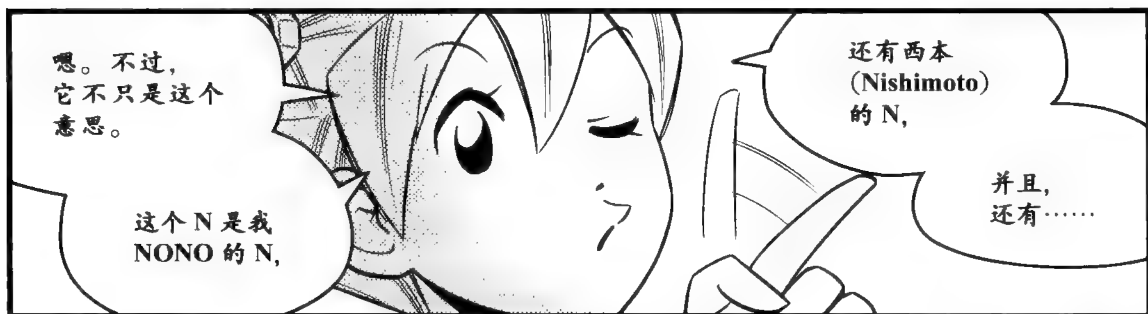
这个书架左右两侧可以分开使用，这符合共用书架的概念。

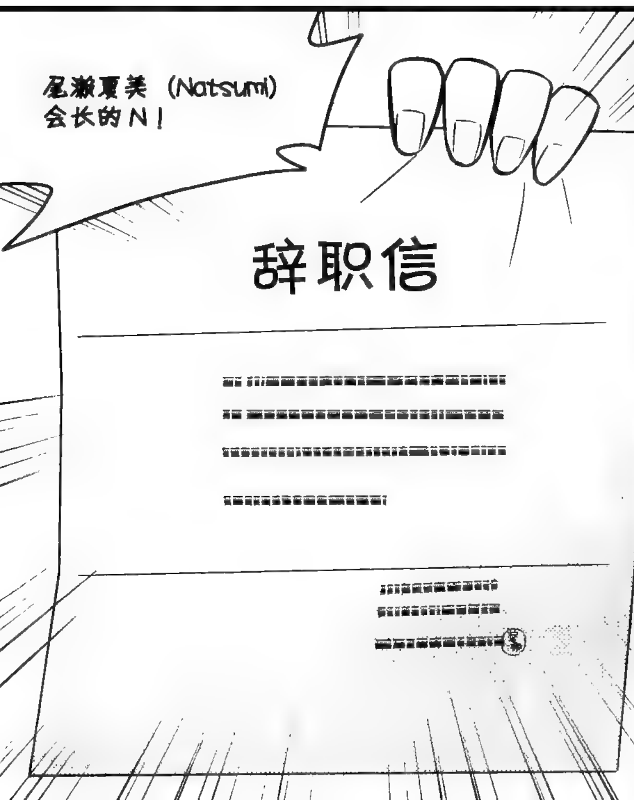
这是从共用屋子中得到了灵感！

并且……
这个书架还有另一种含义。


……？


原来如此！
真是NONO式的设计，很可爱。
啊，我知道了。
这个N是代表NONO的N吧？


还有西本(Nishimoto)的N，
并且，还有……
嗯。不过，它不只是这个意思。
这个N是我NONO的N，

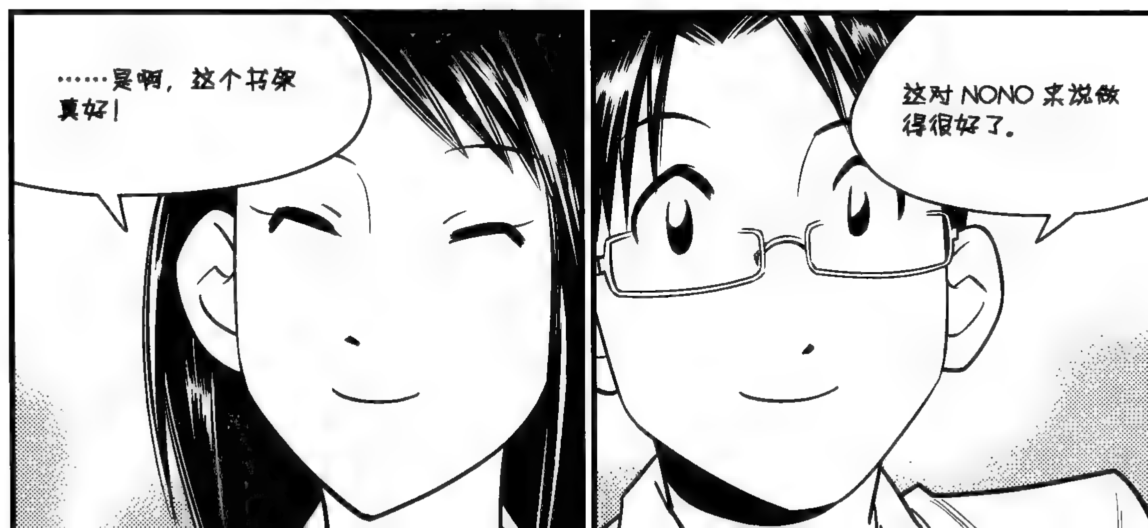

尾濑夏美（Natsumi）会长的N！
辞职信


尾濑夏美

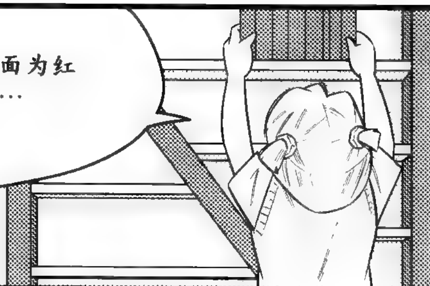

Nono
Nishimoto
Natsumi
啊……


我通过之前的辞职信知道了尾濑会长的名字。
确实，或许是因为共用活动室才有了尾濑会长的谎言。


但是，结果证明我们三个人有缘，还做出了这个书架……


这对NONO来说做得很好了。
……是啊，这个书架真好！


……好!!
让我们来放书吧!


首先是封面为红色的书……
嗨哟!


等一等!





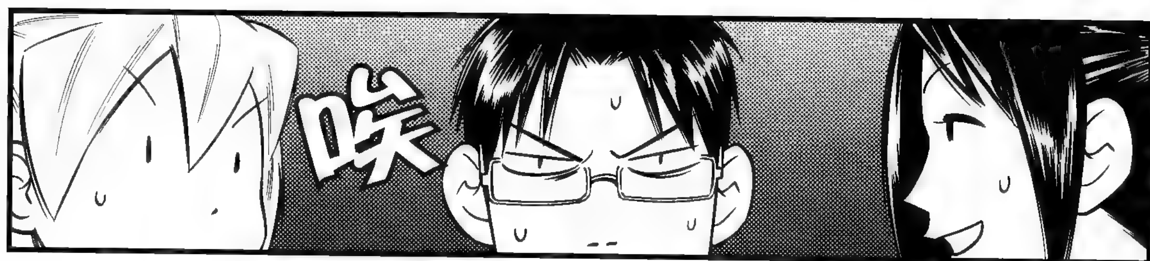
我要按照我的意思来排列。

我能听到书的灵魂之歌！！

哈哈，你们两人真会开玩笑！

摆书时要重视颜色和设计哟！

Go



那样的话，一个书架就不够用了吧！
再给我做一个，NONO！

什么??
你还真会使唤人！

并且不仅需要会费还需要材料费……尾濑会长！

不行！
学生会是不会出这笔钱的！

文艺部
设计部

附 录

◆ 希腊字母和读法

大写	小写	英文注音	中文注音
Α	α	alpha	阿尔法
Β	β	beta	贝塔
Γ	γ	gamma	伽玛
Δ	δ	delta	德尔塔
Ε	ε	epsilon	伊普西龙
Ζ	ζ	zeta	截塔
Η	η	eta	依塔
Θ	θ	theta	西塔
Ι	ι	iota	约塔
Κ	κ	kappa	卡帕
Λ	λ	lambda	兰布达
Μ	μ	mu	缪
Ν	ν	nu	纽
Ξ	ξ	xi	克西
Ο	o	omicron	奥密克戎
Π	π	pi	派
Ρ	ρ	rho	肉
Σ	σ	sigma	西格玛
Τ	τ	tau	套
γ	υ	upsilon	宇普西龙
Φ	ϕ（φ）	phi	佛爱
Χ	χ	chi	西
Ψ	ψ	psi	普西
Ω	ω	omega	欧米伽

◆ 国际单位制（SI）词头

倍数	符号	读法
10^{12}	T	tera（太[拉])
10^{9}	G	giga(吉[咖])
10^{6}	M	mega （兆）
10^{3}	k	kilo （千）
10^{2}	h	hecto （百）
10	da	deka （十）
10^{-1}	d	deci （分）
10^{-2}	c	centi （厘）
10^{-3}	m	milli （毫）
10^{-6}	μ	micro （微）
10^{-9}	n	nano(纳[诺]）
10^{-12}	p	pico(皮[可]）

例如

k(千)=10^{3}=1000

m（毫）=10^{-3}=1/1000=0.001

◆ 各种截面的截面惯性矩和截面系数

I_y、I_z 分别表示围绕 y 轴和 z 轴的截面惯性矩 I。可以求出截面极惯性矩 I_p，$I_p=I_y+I_z$。

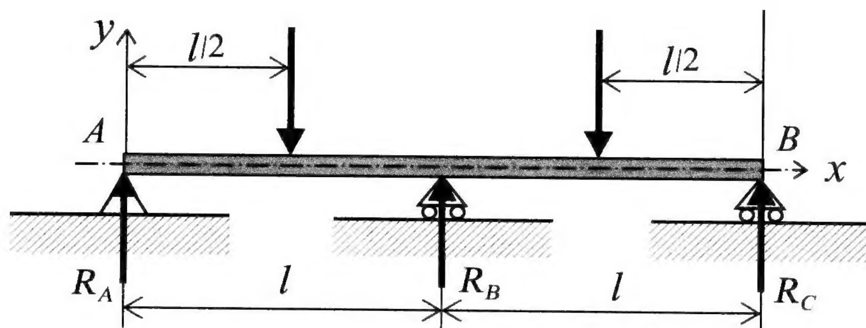
截面	截面惯性矩	截面系数
	$I_y=\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{b^3h}{12}$ $I_z=\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{bh^3}{12}$	$Z_y=\frac{I_y}{b/2}=\frac{b^2h}{6}$ $Z_z=\frac{I_z}{h/2}=\frac{bh^2}{6}$
	$I_y=I_z=4R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$ $=\frac{\pi}{4}R^4=\frac{\pi}{64}D^4$	$Z_y=Z_z=\frac{I_y}{R/2}=\frac{\pi}{32}D^3$
	$I_y=\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}-\frac{z}{h}\right)az^2\mathrm{d}z=\frac{1}{36}ah^3$ $I_z=2\int_0^{a/2}\left(1-\frac{2y}{a}\right)hy^2\mathrm{d}y=\frac{1}{48}a^3h$	$Z_y=\frac{I_y}{2h/3}=\frac{1}{24}ah^2$ $Z_z=\frac{I_z}{a/2}=\frac{1}{12}ah^2$
	$I_y=\frac{1}{36}\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}h^3$ $I_z=\frac{1}{48}h\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$	$Z_y=\frac{I_y}{h_1}=\frac{1}{12}\frac{a^2+4ab+b^2}{a+2b}h^2$ $Z_z=\frac{I_y}{b/2}=\frac{1}{24}\frac{h}{b}\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$
	$I_y=\frac{1}{48}ab^3$	$Z_y=\frac{I_y}{b/2}=\frac{1}{24}ab^2$
	$I_y=\frac{\pi}{4}ab^3$	$Z_y=\frac{I_y}{b/2}=\frac{\pi}{2}ab^2$
	$I_y=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$	$Z_y=\frac{I_y}{H/2}=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$
	$I_y=2A_fl_f^2+\frac{bt_f^3}{6}+\frac{t_wh^3}{12}$ $I_z=\frac{b^3t_f}{6}+\frac{t_w^3h}{12}$	$Z_y=\frac{I_y}{(h/2+t_f)}=\frac{2bt_f^3+t_wh^3+24A_fl_f^2}{6(h+2t_f)}$ $Z_y=\frac{I_z}{b/2}I_z=\frac{2b^3t_f+t_w^3h}{6b}$

◆ 计算的详细过程（超静定梁）

这是在 P189 中所处理的“有三个支撑脚的长凳问题（超静定梁）”的详细计算过程。



在此我将事先介绍一下有关解答超静定梁问题的例子。
该计算非常复杂。
请大家在好好地学过材料力学后再返回来看一遍！



因为这个问题是左右对称的问题，所以只要考虑一半就可以了。
假设在各个支点反作用力为 $R_A=R_C$ ，R_B 根据力平衡方程式可以得出

$$2R_A + R_B = 2P$$

在考虑左右对称问题时，能够自动地满足力矩平衡方程式。
利用这一关系求 AB 之间的弯曲力矩就是

$$M = \begin{cases} -R_A x & 0 < x < l/2 \\ -R_A x + P(x - l/2) & l/2 < x < l \end{cases}$$

虽然在本书中没有说明，但是利用“梁的 y 方向的应变 v 与曲率 k 的关系($k=\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2$)”和“弯曲力矩与曲率的关系（$M=EIk$）”，可以得出

$$-EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \begin{cases} -R_A x & 0 < x < l/2 \\ -R_A x + P(x - l/2) & l/2 < x < l \end{cases}$$

为了求出 v，让我们将这个公式积分。

$$-EI\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}-\frac{1}{2}R_Ax^2+C_1 & 0<x<l/2\\ -\frac{1}{2}R_Ax^2+\frac{1}{2}P\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+C_1 & l/2<x<l\end{cases}$$

$$-EIv=\begin{cases}-\frac{1}{6}R_Ax^3+C_1x+C_2 & 0<x<l/2\\ -\frac{1}{6}R_Ax^3+\frac{1}{6}P\left(x-\frac{l}{2}\right)^3+C_1x+C_2 & l/2<x<l\end{cases}$$

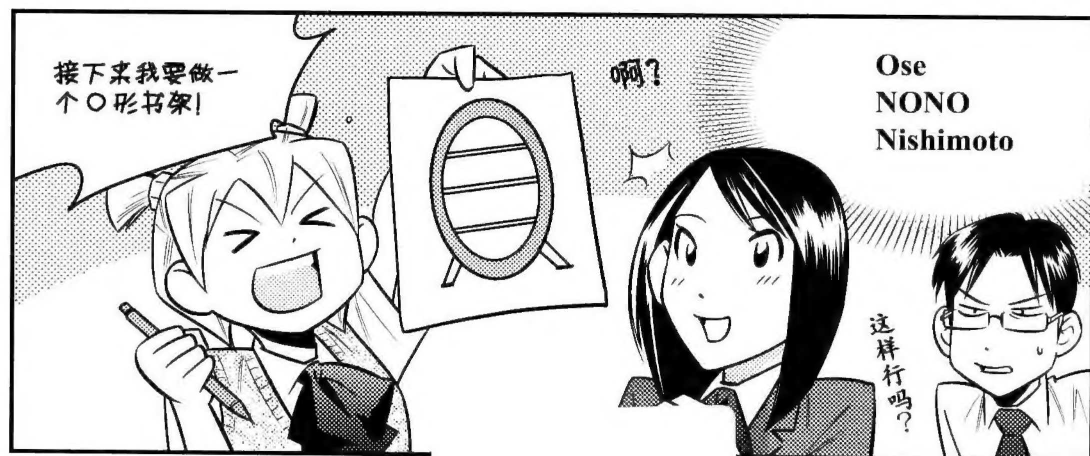
接着来考虑一下在支点处的变位条件，

根据 x=0 时 v=0（在 A 点不变位）得出 C_2=0，在 x=l 时，v=dv/dx=0(在 B 点不变位不倾斜)，所以可以得出

$$-\frac{1}{2}R_Al^2+\frac{1}{8}Pl^2+C_1=0$$
$$-\frac{1}{6}R_Al^3+\frac{1}{48}Pl^3+C_1l=0$$

如果解这个联立方程组，就可以得到

$$R_A=\frac{5}{16}P,\qquad R_B=2P-2R_A=\frac{22}{16}P,\qquad C_1=-\frac{1}{32}Pl^2$$


接下来我要做一
个O形书架!
啊?
Ose
NONO
Nishimoto
这样行吗?

（O-4768.0101）
责任编辑：张丽娜　赵丽艳
责任制作：董立颖　魏　谨
封面制作：泊　远

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长 总编
"希望杯"全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任
周国镇

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长
鲁谆

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长
成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士

www.sciencep.com


ISBN 978-7-03-034638-4
9 787030 346384

科学出版社 东方科龙
联系电话：010-82840399
E-mail:boktp@mail.sciencep.com
有关网址：http://www.okbook.com.cn

销售分类建议：科普

定　价：32.00元